Concours blanc de Mathématiques du premier semestre[1]

mercredi 13 décembre 2017

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet. Il est composé de quatre exercices et il est fortement recommandé d'aborder chacun d'entre eux.

Rédigez sur des copies doubles lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour les appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.

Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement (un mauvais usage sera sanctionné). L'usage du symbole $\Rightarrow$ est interdit lors de cette épreuve.

Exercice 1 : Questions en vrac

---

1) **Questions de cours.**
   a) Donner la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
   b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ (n'étant pas l'éventuelle extrémité droite finie de I). Donner la définition quantifiée de la continuité à droite d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en x_0.
   c) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2) Calculer l'espérance de $Y = X\,2^{-X}$ lorsque X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
3) Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x(1-x)} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ x^2\,2^{-\sqrt[3]{x}} & \text{si} \quad x \in [1,+\infty[\end{cases}$.
   a) Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
   c) Écrire un programme en `Scilab` qui prend en entrée un réel x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in]0,+\infty[$ et un message d'erreur sinon.
4) Écrire un programme en `Scilab` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. *Vous ne pouvez pas utiliser la fonction `Scilab` préprogrammée permettant de calculer une factorielle, celle-ci n'étant pas au programme.*

1. plus connu sous le nom de DS n° 4.

Exercice 2 : Urnes de Pólya

Soient r_0, b_0 et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b_0 boules bleues et r_0 boules rouges. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre d de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire.

On se limite à un nombre fini d'étapes afin de modéliser cette expérience à l'aide d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *que l'on ne cherchera pas à expliciter.*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons R_n l'événement « la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge » et notons $p_n = \mathbb{P}(R_n)$.
   a) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
   b) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge.
   c) Calculer la probabilité que la première boule soit rouge, sachant que la seconde est rouge.
   d) Est-ce que R_1 et R_2 sont indépendants ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.
   a) Montrer soigneusement que la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges est
   $$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{r_0 + kd}{r_0 + b_0 + kd}$$
   b) Calculer la probabilité que la première boule tirée soit bleue et les $n-1$ suivantes rouges.
   c) Déduire des deux questions précédentes la probabilité que la première boule soit rouge sachant que les $n-1$ suivantes sont rouges. Calculer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons N_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges contenues dans l'urne au moment où l'on pioche la $n^{\text{ième}}$ boule.
   a) Justifier que $N_n(\Omega) = \left\{ r_0 + kd \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.
   b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{[N_n = r_0 + kd]}(R_n)$.
   c) En déduire que $p_n = \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{r_0 + b_0 + (n-1)d}$.
   d) Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle $X_n = \dfrac{1}{d}\big(N_{n+1} - N_n\big)$. En déduire que son espérance est égale à p_n.
   e) Obtenir une expression de p_{n+1} en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On pourra utiliser la formule d'additivité de l'espérance : si U et V sont deux variables aléatoires réelles finies, alors $\mathbb{E}(U + V) = \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V)$.
   f) En déduire que $p_n = \dfrac{r_0}{r_0 + b_0}$. Commenter ce résultat.

Exercice 3 : Lancers de boules dans des cases

Soient n et N deux entiers tels que $2 \leqslant N \leqslant n$. Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les n lancers sont indépendants et que chaque boule a pour probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases. On note T_n le nombre de cases occupées après n lancers.

1) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience. Préciser le cardinal de Ω
2) Quelles sont les valeurs prises par T_n ? Justifier brièvement que toutes les valeurs en questions sont prises par T_n avec probabilité non nulle.
3) Déterminer les lois de T_1 et T_2.
4) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.
5) Exprimer, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(T_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(T_n = k)$ et $\mathbb{P}(T_n = k-1)$.
6) Considérons G_n la fonction génératrice de T_n, c'est-à-dire la fonction polynomiale définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_n(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = k)x^k.$$

   a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$.
   b) Exprimer $G_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(T_n)$.
   c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$.
   d) En déduire $\mathbb{E}(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$.
   e) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Exercice 4 : Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer les applications **continues** f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) = f(x)f(y).$$

On remarque que la fonction nulle est solution. On se donne désormais une solution f non nulle.

1) Montrer que f est paire. On s'intéresse donc à la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $f(0)$.
3) Le but de cette question est de montrer par l'absurde que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Supposons donc que f s'annule en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{2^n}}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$.
   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En déduire que $f(0) = 0$ et conclure.
4) En déduire que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.
5) On introduit $g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln\big(f(\sqrt{x})\big)$.
   a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
   c) *On a montré dans l'exercice 9 du TD n° 11 qu'une telle fonction est linéaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = ax$.*
   En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $f(x)$ en fonction de a et de x.
6) Montrer que toutes les fonctions obtenues sont bien solutions au problème et conclure.

L'exercice suivant n'est à aborder que si vous avez traité l'intégralité du sujet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro.

1) Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}(u_k-\ell)\right| \leqslant \dfrac{n\varepsilon}{2}$.
2) Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k-\ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   (on utilise la convention que cette dernière somme est nulle si $n_0 = 1$).
3) Conclure.
4) En adaptant la preuve ci-dessus, montrer que le résultat est toujours vrai si $\ell = +\infty$.