Chapitre hors série

Exponentielle et logarithme népérien

Nous avons tout en main désormais pour démontrer rigoureusement les résultats usuels sur les fonctions exponentielle, logarithme népérien et les fonctions puissances d'exposant réel.

I La fonction exponentielle

1) Introduction

Il existe de nombreuses définitions de la fonction exponentielle.

- En tant que limite d'une suite de fonctions : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ existe et on note $\exp(x)$ sa limite.
- En tant que somme d'une série de fonctions : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ existe et on note $\exp(x)$ sa limite.
- En tant qu'une unique solution d'une équation différentielle : il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note $\exp$.
- En tant qu'une unique solution d'une équation fonctionnelle : il existe une unique fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = e$. On la note $\exp$.
- En tant que bijection réciproque du logarithme népérien (*mais cette définition requiert d'avoir montré au préalable l'existence de cette dernière*).

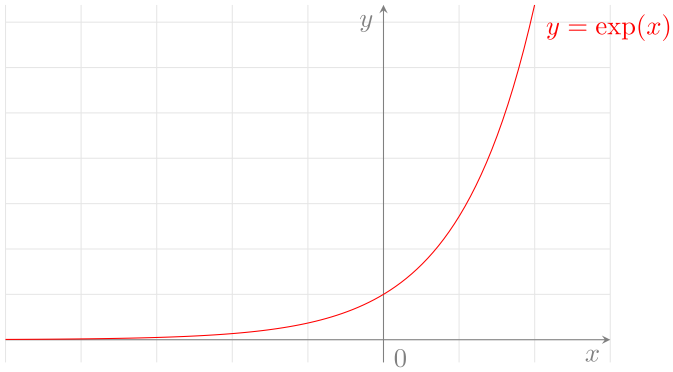
Dans ce chapitre, nous allons utiliser la première méthode.

2) Définition et propriétés de la fonction exponentielle

Proposition/Définition 1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la suite* $\left(\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge.*
La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ *est appelée exponentielle et notée* $\exp$.

Théorème 2. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(0) = 1$.
2. $\exp$ *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
4. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad$ *et* $\quad \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
5. *Pour tous* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$.
6. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\quad \exp(x) \geqslant 1 + x$.
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
8. $\exp$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
9. $\exp$ *est une bijection continue de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.
11. $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.
12. $\exp$ *est l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *dont la valeur en* 0 *est* 1 *et dont la dérivée est égale à elle-même.*



La fonction exponentielle vérifie des propriétés analogues à celles des puissances entières. Ainsi :

Définition 3. *On note* $e = \exp(1)$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on note aussi* e^x *au lieu de* $\exp(x)$*.*

3) Démonstration

Ce paragraphe est consacré à la preuve de l'existence et des propriétés de la fonction exponentielle.

a) Résultats préliminaires

Commençons par quelques résultats préliminaires.

Lemme 4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$(P_n) \qquad \forall y \in \left]-1, +\infty\right[, \qquad 1 + ny \leqslant (1+y)^n.$$

$$(Q_n) \qquad \forall y \in \left]-1, \frac{1}{n}\right[, \qquad (1+y)^n \leqslant \frac{1}{1-ny}.$$

Démonstration.

- Procédons par récurrence. Pour tout $y \in \left]-1, +\infty\right[$, on a $1 + 1 \times y \leqslant (1+y)^1$ donc (P_1) est vraie. Supposons que (P_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in \left]-1, +\infty\right[$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $(1+y)^{n+1} = (1+y)(1+y)^n \geqslant (1+y)(1+ny)$ et donc

$$(1+y)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)y + ny^2 \geqslant 1 + (n+1)y.$$

  Nous en déduisons que (P_{n+1}) est vraie. Par récurrence, nous obtenons que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Procédons par récurrence. Pour tout $y \in \left]-1, 1\right[$, $(1+y)(1-y) = 1 - y^2 \leqslant 1$ donc $1 + y \leqslant \dfrac{1}{1-y}$. Ainsi (Q_1) est vraie. Supposons que (Q_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in \left]-1, \dfrac{1}{n+1}\right[$. On a $y \in \left]-1, \dfrac{1}{n}\right[$ donc l'hypothèse de récurrence entraîne que $(1+y)^{n+1} = (1+y)(1+y)^n \leqslant \dfrac{1+y}{1-ny}$. Or

$$\frac{1+y}{1-ny} - \frac{1}{1-(n+1)y} = \frac{(1+y)(1-(n+1)y) - (1-ny)}{(1-ny)(1-(n+1)y)} = \frac{-(n+1)y^2}{(1-ny)(1-(n+1)y)} \leqslant 0 \qquad \square$$

  si bien que $(1+y)^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1-(n+1)y}$. Nous en déduisons que (Q_{n+1}) est vraie. Par récurrence, nous en déduisons que (Q_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 5. *Soit* $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite réelle telle que* $ns_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*. Nous avons* $(1+s_n)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$*.*

Démonstration. Puisque $ns_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|ns_n| \leqslant 1$ et donc $s_n \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subset \left]-1, \frac{1}{n}\right[$. Soit $n \geqslant n_0$. D'après (P_n) et (Q_n), on obtient alors $1 + ns_n \leqslant (1+s_n)^n \leqslant \dfrac{1}{1-ns_n}$ donc

$$ns_n \leqslant (1+s_n)^n - 1 \leqslant \frac{1}{1-ns_n} - 1 = \frac{ns_n}{1-ns_n}.$$

Enfin comme $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous obtenons que $\dfrac{ns_n}{1-ns_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(1+s_n)^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

b) Existence de la fonction exponentielle (preuve de la proposition 1)

Donnons-nous $x \in \mathbb{R}$ et posons $n_x = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant n_x$, notons $u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$. Nous allons montrer que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ sont adjacentes.

1. **La suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est croissante.**
Soit $n \geqslant n_x$. On alors $-1 < \left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$. En particulier $1+\dfrac{x}{n} > 0$ donc $u_n(x) \neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\frac{n+1+x}{n+x}\right)^{n+1}$$
$$= \left(\frac{n(n+1)+nx}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$
$$= \left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1-\dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$.
On a $-(n+x) < -x$ et $n+x > 0$ donc $-1 < \dfrac{-x}{n+x}$. Par conséquent la propriété (P_{n+1}) entraîne que

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} > 0.$$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geqslant \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{n}{n+x} = 1$. Cela signifie que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est croissante.
2. **La suite $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est décroissante.**
Pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{u_n(-x)}$ et $n_{-x} = n_x$ donc le point précédent entraîne que $\big(u_n(-x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est croissante. Nous en déduisons que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est décroissante.
3. **La suite $\big(u_n(x)-v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ converge vers 0.**
Cherchons un encadrement. Soit $n \geqslant n_x$. On a

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{x^2}{n}$$

d'après (P_n) car $-1 < -\dfrac{x^2}{n^2}$. Ainsi $\dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$.

Puisque $v_n(x) > 0$, nous en déduisons que $v_n(x) - \dfrac{x^2}{n}v_n(x) \leqslant u_n(x) \leqslant v_n(x)$ et donc $-\dfrac{x^2}{n}v_n(x) \leqslant u_n(x)-v_n(x) \leqslant 1$. Enfin $(v_n(x))_{n\geqslant n_x}$ est décroissante donc

$$\forall n \geqslant n_x, \qquad -\frac{x^2}{n}v_{n_x}(x) \leqslant u_n(x)-v_n(x) \leqslant 1.$$

Par encadrement, nous obtenons que $u_n(x)-v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Nous en déduisons que $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ sont adjacentes. Par conséquent elles convergent vers un même réel que l'on note $\exp(x)$. D'où l'existence de la fonction exponentielle.

c) Propriété de la fonction exponentielle (preuve du théorème 2)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 1$ donc, en passant à la limite car, on obtient que $\exp(0) = 1$.
2. $\exp$ **est strictement positive sur** $\mathbb{R}$**.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ converge vers $\exp(x)$, on a aussi $u_{n_x}(x) \leqslant \exp(x)$. De plus $u_{n_x} = \left(1 + \dfrac{x}{n_x}\right)^{n_x} = \left(\dfrac{n_x + x}{n_x}\right)^{n_x} > 0$ car $n_x + x > 0$.
3. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$**.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a vu précédemment que, pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(-x) = \dfrac{1}{u_n(x)}$. En passant à la limite on obtient $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$. Ainsi $\exp(x) > 0$.
4. **Pour tout** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$**,** $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ **et** $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$**.**
   Donnons-nous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons, pour n assez grand,
   $$\frac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} = \left(\frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{xy}{n^2 + n(x+y)}\right)^n.$$
   Puisque $n\dfrac{xy}{n^2 + n(x+y)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, le lemme 5 entraîne que $\dfrac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Nous avons aussi $\dfrac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\exp(x)\exp(y)}{\exp(x+y)}$. D'où le résultat par unicité de la limite.

   Ensuite on a $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$. Ensuite, si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et $\exp(nx) = \dfrac{1}{\exp((-n)x)} = \dfrac{1}{\big(\exp(x)\big)^{-n}} = \big(\exp(x)\big)^n$.
6. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $\exp(x) \geqslant 1 + x$**.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $n \geqslant n_x$, d'après (P_n), on a $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\dfrac{x}{n} = 1 + x$. En passant à la limite, on obtient l'égalité.
7. **Limites en** $\pm\infty$ **de** $\exp$**.**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 + x) = +\infty$. Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$. Par composition de limite, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(-x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.
8. $\exp$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a alors $\dfrac{\exp(y)}{\exp(x)} = \exp(y - x) \geqslant 1 + y - x > 1$ et donc $\exp(x) < \exp(y)$. Ainsi $\exp$ est strictement croissante.
9. $\exp$ **est une bijection continue de** $\mathbb{R}$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$**.**
   Commençons par montrer que $\exp$ est continue en 0. Donnons-nous $x \in \,]-1, 1[$. On sait que $1 + x \leqslant \exp(x)$ et $1 - x \leqslant \exp(-x)$ donc $1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant \dfrac{1}{1 - x}$. En faisant tendre x vers 0, on obtient que $\exp(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = \exp(0)$. Ainsi $\exp$ est continue en 0. Ensuite, si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\exp(x - x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$ et donc
   $$\exp(x) = \exp(x_0 + (x - x_0)) = \exp(x_0)\exp(x - x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \exp(x_0)$$
   La fonction $\exp$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, puisqu'elle est strictement croissante et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, le théorème de la bijection entraîne que $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

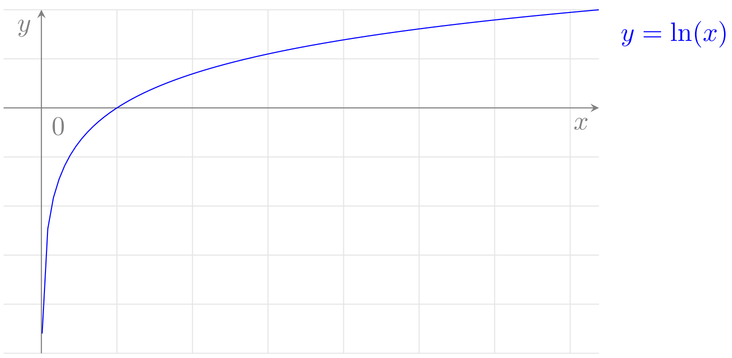
10. Pour tout $x \in]0,1[$, $1 \leqslant \dfrac{\exp(x)-1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right) = \dfrac{1}{1-x}$. De même, pour tout $x \in]-1,0[$, $\dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{\exp(x)-1}{x} \leqslant 1$. En faisant tendre x vers 0, on obtient que $\dfrac{\exp(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
11. **$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.**
    Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
    $$\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \exp(x_0).$$
    Ainsi $\exp$ est dérivable en x_0 et $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$.
12. **$\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la valeur en 0 est 1 et dont la dérivée est égale à elle-même.**
    On a déjà montré que $\exp$ vérifiait ces propriétés. Maintenant, supposons que f est une fonction dérivable qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ et montrons qu'il s'agit alors de la fonction exponentielle. La fonction $\phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
    $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp^2(x)} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp^2(x)} = 0.$$
    Ainsi la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\phi(0) = f(0)/\exp(0) = 1$. Par conséquent $f(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II La fonction logarithme népérien

Définition 6. *La bijection réciproque de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est appelée logarithme népérien et notée $\ln$.*

Proposition 7. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$. En particulier $\ln(1) = 0$.*
2. *$\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*
4. *$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.*
5. *Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.*
6. *Pour tous $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$,*
   $$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
   et $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
7. *$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.*
8. *$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.*



DÉMONSTRATION. 1. C'est le cas puisque $\exp$ et $\ln$ sont des bijections réciproques. De plus $\ln(1) = 0$ car $\exp(0) = 1$.
2. C'est une conséquence du théorème de la bijection car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. C'est une conséquence du théorème de la bijection car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. C'est une conséquence du théorème de la limite monotone.
5. Soit $x \in]-1, +\infty[$. On a $0 < 1 + x \leqslant \exp(x)$ donc, puisque $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
6. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Nous avons

$$\exp\left(\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)\right) = \frac{\exp\left(\ln(xy)\right)}{\exp\left(\ln(x)\right)\exp\left(\ln(y)\right)} = \frac{xy}{xy} = 1,$$

donc $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = \ln(1) = 0$. Ensuite

$$\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\exp\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x}x = 1$$

donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln(1) = 0$. Puis $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$. Enfin, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(\ln(x^n) - n\ln(x)) = \frac{\exp(\ln(x^n))}{\exp(n\ln(x))} = \frac{x^n}{\exp(\ln(x))^n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$$

donc $\ln(x^n) - n\ln(x) = \ln(1) = 0$.
7. Puisque $\exp'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

□

8. Puisque $\ln$ est dérivable en 1, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

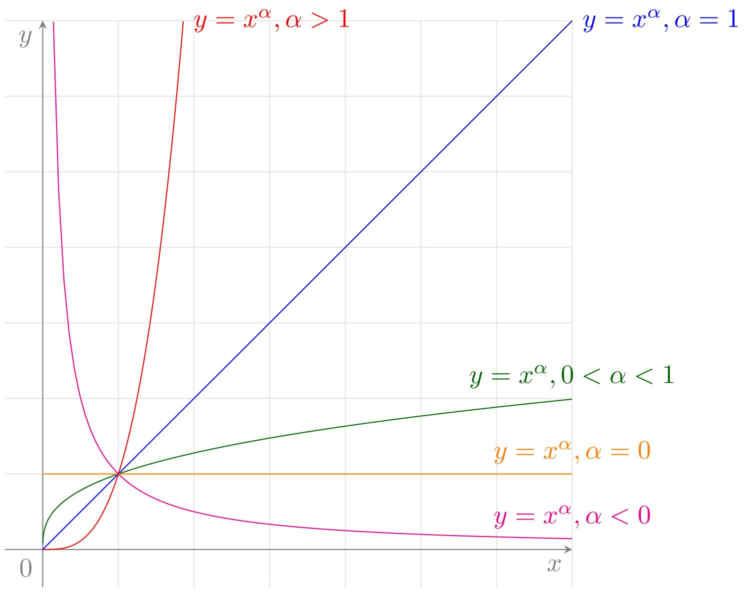
III Les fonctions puissances d'exposant réel

Définition 8. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle puissance d'exposant α la fonction p_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad p_\alpha(x) = e^{\alpha\ln(x)}.$$

Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$. Si $\alpha = 0$, on pose $p_\alpha(0) = 1$.

Pour tout $x > 0$, on note $p_\alpha(x) = x^\alpha$.



Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 dans le cas où la puissance est positive. Seules les puissances entières sont définies également sur $\mathbb{R}_-^*$.

Proposition 9. *Nous avons, pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β,*

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x), \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}, \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

Démonstration. Soient $x > 0$, $y > 0$, α et β des réels.
- $\ln(x^\alpha) = \ln(e^{\alpha\ln(x)}) = \alpha\ln(x)$.
- $(x^\alpha)^\beta = \exp(\beta\ln(x^\alpha)) = \exp(\beta\alpha\ln(x)) = x^{\alpha\beta}$.
- $x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)}e^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta$.
- $x^{\alpha-\beta} = e^{(\alpha-\beta)\ln(x)} = \dfrac{e^{\alpha\ln(x)}}{e^{\beta\ln(x)}} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.
- $(xy)^\alpha = e^{\alpha\ln(xy)} = e^{\alpha(\ln(x)+\ln(y))} = e^{\alpha\ln(x)}e^{\alpha\ln(y)} = x^\alpha y^\alpha$. □

Proposition 10. *Si $\alpha \geqslant 0$ (resp. $\alpha < 0$), alors p_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).*

Si $\alpha \geqslant 1$ (resp. $\alpha < 1$) la fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \textit{(resp. } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \qquad p_\alpha'(x) = \alpha p_{\alpha-1}(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuité et la dérivabilité de p_α sur $\mathbb{R}_+^*$ découlent de la continuité et la dérivabilité de $\exp$ et $\ln$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$p_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln(x)} = \frac{\alpha}{e^{\ln(x)}}e^{\alpha\ln(x)} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)}.$$

Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln(x)} = 0 = p_\alpha(0)$ d'où la continuité de p_α en 0. Si $\alpha > 1$, alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{p_\alpha(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\alpha-1)\ln(x)} = 0.$$

donc p_α est dérivable en 0 avec $p_\alpha'(0) = 0$. □

IV Les croissances comparées

Proposition 11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

Démonstration. Introduisons la fonction $g : x \in [1, +\infty[\longmapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \leqslant 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur $[1, +\infty[$ et $g(1) = -2$. Nous en déduisons que, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g(x) \leqslant -2 < 0$. Par conséquent

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 < \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème d'encadrement entraîne la proposition. □

Proposition 12.
1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.*
2. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$.*
3. *Pour tous $a \in]1, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$.*
4. *Pour tous $a \in]1, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x\, |x|^\alpha = 0$.*

Démonstration. 1. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^{\beta/\alpha} = +\infty$, la proposition 11 et le théorème de composition des limites entraînent que

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Pour tout $x \in]0,1[$, si on pose $y = 1/x$, alors $x^\beta |\ln(x)|^\alpha = \frac{|\ln(1/y)|^\alpha}{y^\beta} = \frac{|\ln(y)|^\alpha}{y^\beta}$. Le point 1 entraîne que $\lim_{y\to+\infty} \frac{|\ln(y)|^\alpha}{y^\beta} = 0$. Puisque $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} = +\infty$, le théorème de composition des limites entraîne le point 2.
3. Pour tout $x > 0$, si on pose $y = e^x$, alors $\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{(\ln(y))^\alpha}{y^{\ln(a)}}$. Puisque $\beta = \ln(a) > 0$, le point 1 entraîne que $\lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln(y))^\alpha}{y^\beta} = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = 0$, le théorème de composition des limites entraîne le point 3.
4. Pour tout $x < 0$, si on pose $y = -x$, alors $a^x\,|x|^\alpha = \frac{y^\alpha}{a^y}$. Le point 3 entraîne que $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{a^y} = 0$ et donc le théorème de composition des limites entraîne le point 4. □