I Probabilité conditionnelle

Dans toute cette section $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1) Définition et propriétés

Commençons par un exemple pour motiver cette notion. Lançons un dé équilibré à six faces. Sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 n'est plus $5/6$ mais $2/3$ (car on sait qu'on a que trois résultats possibles : 2, 4 ou 6).

Notons A l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 ». Puisque l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{5}{6}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Remarquons que la probabilité de B sachant que A est réalisé est $\dfrac{2}{3} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Définition 1. *Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le réel*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On la note aussi $\mathbb{P}(B|A)$.

Remarques : Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}_A(B) = 1$. En particulier $\mathbb{P}_A(A) = 1$.
- Puisque $A \cap B \subset A$, nous avons $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc $\mathbb{P}_A(B) \in [0, 1]$.
- Le nombre $\mathbb{P}_A(B)$ représente la probabilité de B calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience au moment où A vient de se réaliser. Il dispose de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis son début : pour lui l'univers devient A.

Proposition 2. *Soit A un événement de probabilité non nulle. L'application* $\mathbb{P}_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array}$ *est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

Démonstration.

□

Corollaire 3. *Si A, B et C sont trois événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors*

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C).$$

Proposition 4. *Supposons que $\mathbb{P}$ soit la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Alors, pour tous événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$,*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card}(A)}.$$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple : *On dispose d'un jeu de 52 cartes et on distribue treize cartes à chacun des quatre joueurs (de façon équiprobable). Calculons la probabilité que le joueur (1) ait exactement deux cœurs dans sa main sachant que les joueurs (3) et (4) en possèdent huit à eux deux (on connaît donc une information supplémentaire : par exemple la composition exacte des 26 cartes des joueurs 3 et 4).*

2) Formule des probabilités composées

Généralement il est plus facile de déterminer la probabilité conditionnelle que de déterminer la probabilité d'une intersection. Si A et B sont des événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A).$$

Voici une formule qui généralise cela à l'intersection d'un nombre fini d'événements.

Théorème 5 (formule des probabilités composées). *Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors*

Démonstration.

$\square$

Exemple : *On considère une urne qui contient 10 boules dont 6 rouges et 4 bleues. On tire successivement 3 boules avec les règles suivantes :*

- *Si on tire une boule rouge, alors on l'enlève.*
- *Si on tire une boule bleue, on la remplace par une boule rouge.*

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge, une boule bleue puis une boule rouge (dans cet ordre) ?

3) Formule des probabilités totales

Théorème 6 (formule des probabilités totales). *Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$. Pour tout événement B, nous avons*

DÉMONSTRATION. □

Généralisons la formule des probabilités totales pour un système complet d'événements.

Théorème 7. *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$. Alors, pour tout événement B,*

DÉMONSTRATION. □

Exemple : *Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes : ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Ces statistiques montrent qu'un individu enclin aux accidents a une probabilité de $0,4$ d'en avoir un en l'espace d'un an. Cette probabilité tombe à $0,2$ pour les gens à risque modéré. On suppose que 30% de la population appartient à la classe à haut risque. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ?*

4) Formule de Bayes

Théorème 8 (formule de Bayes). *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient A et B deux événements qui sont tous les deux de probabilité non nulle. Alors*

DÉMONSTRATION. □

De la formule de Bayes et la formule des probabilités totales nous déduisons que, si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$, alors

Plus généralement, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$, alors pour tout événement B de probabilité non nulle,

Exemples :

- *Reprenons l'exemple de la compagnie d'assurance. Un nouveau signataire a un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à haut risque ?*

- *On réalise un test sanguin pour détecter une maladie dont la probabilité d'occurrence est $0,5\%$. Si le patient est malade, le test détecte la maladie dans 95% des cas. Cependant ce test déclare malades (à tord) 1% des personnes saines. Quelle est la probabilité qu'un patient soit malade sachant que le test est positif ?*

II Indépendance

Dans toute cette section $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1) Indépendance de deux événements

Définition 9. *On dit que deux événements A et B sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

En pratique nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas. En général l'indépendance est une hypothèse de modélisation qui permet de simplifier les calculs. Typiquement si on effectue deux lancers successifs d'une pièce ou d'un dé (ou deux tirages successifs avec remise de boules dans une urne), alors on fera l'hypothèse que les deux lancers sont indépendants : tout événement concernant le résultat du premier lancer seul sera indépendant d'un événement concernant le résultat du deuxième lancer seul.

Exemple : *On lance deux fois une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir Pile est $p =]0, 1[$. Notons A l'événement « les deux lancers donnent le même résultat » et B l'événement « le deuxième lancer donne Face ». A priori l'événement A semble dépendre de l'événement B... analysons cela avec des calculs.*

⚠ L'indépendance de deux événements n'a rien à voir avec le fait que ces deux événements soient incompatibles ou non. Plus précisément, l'incompatibilité est une notion ensembliste (elle est définie dans un espace probabilisable) alors que l'indépendance est une notion probabiliste (elle dépend d'un espace probabilisé). En particulier, si A, B et C sont trois évènements, il se peut que A et B soient indépendants pour $\mathbb{P}$, mais pas pour $\mathbb{P}_C$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_C(A \cap B) \neq P_C(A)\mathbb{P}_C(B)$) ou le contraire (c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cap B) \neq P(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_C(A \cap B) = P_C(A)\mathbb{P}_C(B)$: on dit alors que A et B sont indépendants conditionnellement à C).

Par exemple, si on dispose d'un dé équilibré et de deux pièces (une équilibrée et une possédant deux Piles). On lance le dé. Si on obtient 6, alors on lance deux fois la pièce equilibrée. Sinon on lance deux fois la pièce truquée.

Proposition 10. *Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*

Remarque : Autrement dit la connaissance de A n'influence pas la probabilité de B.

Proposition 11. *Si A et B sont des événements indépendants, alors*

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants.*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants.*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration. Puisque $(A \cap B, A \cap \overline{B})$ est un système complet d'événements, nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Ainsi A et $\overline{B}$ sont indépendants. Les autres cas sont analogues. □

⚠ Par contre, si A et B sont indépendants d'une part et si A et C sont indépendants d'une autre part, alors on on ne peut rien dire quant à l'indépendance de A et $B \cap C$, ou encore de A et $B \cup C$.

- *Un exemple où les événements sont dépendants. On dispose de deux dés équilibrés de couleurs respectives bleues et rouges. On lance les deux dés et on relève les chiffres obtenus. On prend $\Omega = [\![1, 6]\!]^6$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Notons A l'événement « La somme des chiffres vaut 7 », B l'événement « Le dé bleu a donné 5 » et C l'événement « Le dé rouge a donné 2 ».*

- *Un exemple où les événements sont indépendants. On considère la même expérience et on note D l'événement « Le dé rouge donne un chiffre impair ».*

2) Famille d'événements indépendants

Définition 12 (indépendance deux à deux). *Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants deux à deux si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \big(i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\big).$$

Définition 13 (indépendance mutuelle). *On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si*

$$\forall J \subset [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

En particulier, si A, B et C sont trois événements mutuellement indépendants alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$; ce que l'on ne peut pas affirmer si les événements sont indépendants deux à deux.

Proposition 14. *Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition avec $J = \{i, j\}$ pour tout $i \neq j$ dans $[\![1,n]\!]$. □

⚠ La réciproque est fausse.

Reprenons l'exemple des dés rouges et bleus.

Proposition 15. *Si A, B et C sont trois événements mutuellement indépendants, alors*

- *A et $B \cap C$ sont indépendants,*
- *A et $B \cup C$ sont indépendants.*

Démonstration.

□

Théorème 16 (des coalitions). *Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.*

1. *Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A}_k$, alors $B_1, \dots, B_k$ sont mutuellement indépendants.*
2. *Si $J \subset [\![1,n]\!]$, alors $(A_i)_{i \in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.*
3. *Si $J \subset [\![1,n]\!]$, alors tout événement construit à partir de $(A_i)_{i \in J}$ est indépendant de tout événement construit à partir de $(A_i)_{i \notin J}$.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.