Chapitre 8

Compléments de combinatoire

I Cardinal d'un ensemble

1) Ensemble fini et cardinal

Définition ("intuitive"). *On dit qu'un ensemble E est fini s'il possède un nombre fini d'éléments. On appelle alors cardinal de E, et on note $\mathrm{card}(E)$ ou $\#E$ le nombre d'éléments de E.*

En fait cette définition est intuitive (mais cette intuition sera suffisante pour nous cette année) et pas très satisfaisante mathématiquement. En voici une définition plus rigoureuse (mais dont l'utilisation sort de l'esprit du programme) :

Définition. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $\mathbb{E}$. L'entier n est alors appelé la cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$ ou $\#E$.*

Remarques :

- On étend cette définition en posant $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$. Cette convention est naturelle : le vide contient 0 éléments.
- Dire qu'il existe une bijection φ de $[\![1, n]\!]$ sur E revient en fait à numéroter les éléments de E. En effet, si $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$, alors on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple : *L'ensemble $E = \{A\clubsuit, K\clubsuit, Q\clubsuit, J\clubsuit, 10\clubsuit, 9\clubsuit, 8\clubsuit, 7\clubsuit, 6\clubsuit, 5\clubsuit, 4\clubsuit, 3\clubsuit, 2\clubsuit\}$ des piques d'un jeu de 52 cartes est en bijection avec $[\![1, 13]\!]$ via, par exemple, la bijection ψ telle que $\psi(A\clubsuit) = 1$, $\psi(J\clubsuit) = 11$, $\psi(Q\clubsuit) = 12$, $\psi(K\clubsuit) = 13$ et $\psi(i\clubsuit) = i$ pour tout $i \in [\![2, 10]\!]$.*

Proposition. *Soient E et F deux ensembles en bijection. Si E est fini, alors F est fini et $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.*

DÉMONSTRATION.

□

Proposition. *Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie et $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.*

Cette proposition est tout à fait intuitive mais, si on utilise la définition avec les bijections, il faudrait la montrer rigoureusement (par récurrence sur le nombre d'éléments de A), ce qui sort du programme.

2) Ensembles infinis

Définition. *Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

Nous verrons au deuxième semestre que l'on distingue deux types d'ensembles infinis :

- les ensembles dénombrables : ceux qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$. Par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ (et plus généralement toute partie infinie de $\mathbb{N}$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables[1].
- les ensembles non-dénombrables comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou l'ensemble des suites réelles (tous ces exemples sont admis).

1. Nous l'avons vu dans la feuille d'exercice n° 7.

II Dénombrement

Dans toute la suite, on n'utilisera que la définition intuitive d'un ensemble fini et de son cardinal.

Le dénombrement ou la combinatoire (énumérative) est la branche des mathématiques qui consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini, c'est-à-dire à déterminer son cardinal. Dans cette section, nous allons voir plusieurs méthodes pour dénombrer un ensemble fini.

1) Dénombrement des ensembles finis

a) Cardinal d'une réunion de parties

Proposition. *Soient A et B deux ensembles finis et disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$). Alors $A \cup B$ est fini et*

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur le nombre d'éléments de B. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Par récurrence, on obtient :

Proposition. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis et deux à deux disjoints (c'est-à-dire, pour tous i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$, $A_i \cap A_j = \varnothing$). Alors l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini et*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Une conséquence importante de cette proposition est le **lemme (ou principe) des bergers** :

Lemme (des bergers). *Soit E est un ensemble fini et soient $F_1, \ldots, F_p$ des parties de E qui forment une partition de E. Si ces p parties sont toutes de même cardinal égal à $r \in \mathbb{N}^*$, alors $\operatorname{card}(E) = pr$.*

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : Derrière cet énoncé mathématique se cache un principe (qui nous apparait comme tout à fait évident) : « *pour compter le nombre de ses moutons, il suffit à un berger de compter le nombre de pattes et de diviser par 4* ». Souvent un problème de dénombrement consiste à trouver une bonne façon de compter les éléments. Dans la pratique ce principe est donc fondamental : si pour dénombrer un certain ensemble fini, on peut d'abord choisir un élément parmi p choix et que, pour chacun de ces choix, on a r choix (indépendamment du premier choix). Alors l'ensemble contient pr éléments.

> *Par exemple, si on dispose d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 2$, et si on pioche deux boules consécutivement, combien a-t-on de choix pour le tirage ? Il y a n choix pour le premier tirage, puis quelque soit le premier tirage, il y a $n-1$ choix pour le second tirage. Le principe des bergers entraîne alors qu'il y a $n(n-1)$ tirages.*

Proposition. *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors*

1. $\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$.
2. $\operatorname{card}(A \backslash B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B)$.

DÉMONSTRATION. 1.

2.

□

Proposition (formule de Poincaré pour deux ensembles finis). *Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et*

DÉMONSTRATION.

□

Proposition (formule de Poincaré pour trois ensembles finis). *Si A, B et C sont des ensembles finis, alors $A \cup B \cup C$ est fini et*

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant plusieurs fois la formule de Poincaré pour deux ensembles finis, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \cup C) - \operatorname{card}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ &\qquad - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ &\qquad - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

On peut généraliser cette formule pour l'union finie et quelconque d'ensembles finis. Nous verrons cela en exercice.

Exemple : *Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?*

b) Cardinal d'un produit cartésien

Proposition. *Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \times B$ est un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(B).$$

DÉMONSTRATION. Nous avons $A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$ et il s'agit d'une réunion d'éléments deux à deux disjoints. Or, pour tout $a \in A$, l'application $(a, b) \longmapsto b$ est une bijection de $\{a\} \times B$ sur B. Par conséquent $\operatorname{card}(\{a\} \times B) = \operatorname{card}(B)$. Ainsi

$$\operatorname{card}(A \times B) = \sum_{a \in A} \operatorname{card}(\{a\} \times B) = \sum_{a \in A} \operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A) \operatorname{card}(B).$$

□

Corollaire. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis, alors $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i).$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et A est un ensemble fini, alors A^n est un ensemble fini et $\operatorname{card}(A^n) = (\operatorname{card}(A))^n$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des n-uplets composés uniquement de 0 et de 1 est $\{0, 1\}^n$. Nous avons*

c) Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Proposition. *Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) =$.*

DÉMONSTRATION.

□