Chapitre 5

Généralités sur les suites de nombres réels

I Notion de suite de nombres réels

1) Définitions

Définition 1. *Une suite réelle (ou site numérique) u est la donnée*[1] *pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$ d'un réel, appelé terme général de rang n (ou d'indice n) de la suite et noté u_n. La suite u se note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.*

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$.

⚠ On fera bien attention de ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n. Et de ne pas la confondre avec l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite. Il y a un nombre infini d'indices, mais l'ensemble des valeurs peut être fini.

Il arrive qu'une suite ne soit pas définie pour les premières valeurs de $\mathbb{N}$.

Définition 2. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle aussi suite de nombres réelles la donnée de u_n pour chaque $n \geqslant n_0$. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On dit que la suite est définie à partir du rang n_0. Le terme u_{n_0} s'appelle le terme initial de la suite.*

On peut définir une suite de différentes manières.

1. **Suites définies explicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement lorsque l'on donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

   Par exemple, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 5\cdot(-2)^n, \qquad v_n = \frac{1}{n^2+1}\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right), \qquad w_n = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3^n}} & \text{si} \quad n \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

2. **Suites définies par récurrence.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on donne
   - les valeurs de $u_0, \ldots, u_{p-1}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_{n+p} en fonction des p termes précédents.

   On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre p.

   Par exemple, on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 5a_n + n + 2, \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} b_0 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+3} = -3b_{n+1} + 4b_n + n^2. \end{array}\right.$$

   La suite de Syracuse est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_{n+1} = \left\{\begin{array}{ll} 3s_n + 1 & \text{si} \quad s_n \text{ est impair,} \\ \dfrac{s_n}{2} & \text{si} \quad s_n \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

1. Autrement dit une suite u est une application $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais, au lieu de la noter $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$, on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

3. **Suites définies implicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation.

   Par exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.

Définition 3. *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. On dit alors indifféremment que :*

- *La propriété P est vraie à partir d'un certain rang.*
- *$P(n)$ (est vraie) pour n assez grand*

Définition 4. *On dit qu'une suite vérifie une certaine propriété à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ satisfait la propriété.*

Exemple : *La suite $(n^2 - 100)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang (du rang $n = 10$ pour être précis). On peut dire aussi $n^2 - 100 \geqslant 0$ pour n assez grand.*

2) Opérations sur les suites

Définition 5. *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par*

- *$|u|$ la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = |u_n|$.*
- *$u + v$ la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n$.*
- *αu la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha u_n$.*
- *$uv =$ la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n v_n$.*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, on désigne par :

- *$\dfrac{1}{v}$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{1}{v_n}$.*
- *$\dfrac{u}{v}$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.*

3) Propriétés générales

Définition 6 (monotonie). *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est dite*

- *constante si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$,*
- *stationnaire si il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$,*
- *croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
- *décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
- *strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,*
- *strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$,*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante,*
- *strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*
- *périodique si il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$,*

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- comparer 1 avec u_{n+1}/u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque la suite ne s'annule pas.
- étudier le sens de variation de f, lorsque la suite est donnée explicitement sous la forme par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.

Exemple : *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 5$. Étudions ses variations : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 5 - u_n = u_n^2 - 6u_n + 5 = (u_n + 5)(u_n + 1).$$

Montrons par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0. Supposons qu'elle soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $u_{n+1} = u_n + (u_n + 5)(u_n + 1) \geqslant 0$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. D'où le résultat par récurrence.
Nous avons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n + 5)(u_n + 1) \geqslant 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Définition 7. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

- *majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
- *minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples : *La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1. La suite $(n^2 + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 mais n'est pas majorée.*

Remarque : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m et majorée par M alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -\max(|m|, |M|) \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant \max(|m|, |M|)$$

et donc $|u_n| \leqslant \max(|m|, |M|)$. La réciproque est immédiate.

II Exemples de suites réelles

1) Suites arithmétiques

Définition 8. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un réel r tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.

Proposition 9. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est arithmétique de raison r si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + rn.$$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition 10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geqslant p$, $u_n = u_p + r(n - p)$.*
2. *Monotonie :*
   - *Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
3. *Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n + 1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$.*

Démonstration. Les deux premiers points se démontrent par récurrence (ils sont laissés en exercice). Montrons le troisième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n + 1)u_0 + r\frac{n(n + 1)}{2} = (n + 1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

$\square$

2) Suites géométriques

Définition 11. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un réel q tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.

Proposition 12. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est géométrique de raison q si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n.$$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition 13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geqslant p$, $u_n = u_p q^{n-p}$.*
2. *Monotonie :*
   - *Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   - *Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $q \in]0, 1[$ et $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   - *Si $q \in]0, 1[$ et $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 0.*
   - *Si $q \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*
   - *Si $q = -1$ et $u_0 \neq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que deux valeurs.*
3. *Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$.*

Démonstration. Les deux premiers points se démontrent par récurrence (ils sont laissés en exercice). Montrons le troisième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

□

3) Suites arithmético-géométriques

Définition 14. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si il existe deux réels a et b tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarques :

- Si $a = 1$, alors il s'agit d'une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 15. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe deux réels a et b avec $a \neq 1$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Il n'est pas indispensable de connaître cette proposition par cœur : il faut absolument savoir la redémontrer dans un cas particulier. L'idée essentielle derrière la preuve est de déterminer un point fixe de la fonction de récurrence (c'est-à-dire la solution de $x = ax + b$).

Exemple : *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = -4u_n + 1$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = (-4)^n \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1-(-4)^{n+1}}{5}.$$

4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 16. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est dite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si il existe deux réels a et b tels que $b \neq 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation de récurrence ci-dessus.

Dans la suite, donnons-nous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Cherchons des éléments particuliers de $E_{a,b}$. Regardons d'abord parmi les suites géométriques. Si $r \neq 0$, alors $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ si et seulement si

et donc si et seulement si $r^2 = ar + b$.

Définition 17. *On appelle $(E)\ :\ r^2 = ar + b$ équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$.*

Théorème 18. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Notons $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de $(E)\ :\ r^2 = ar + b$.*

- *Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une racine double réelle $r_0 = a/2$ et il existe deux réels λ et μ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n.$$
- *Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux racines complexes non réelles et conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho \neq 0$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$) et il existe deux réels λ et μ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big).$$

Remarque : On détermine λ et μ à l'aide de u_0 et u_1.

- Dans le cas où $\Delta > 0$, on a $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$.
- Dans le cas où $\Delta = 0$, on a $\lambda = u_0$ et $\lambda + \mu = u_1$.
- Dans le cas où $\Delta < 0$, on a $\lambda = u_0$ et $\rho\big(\lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)\big) = u_1$.

Démonstration. Supposons que $\Delta < 0$ (les preuves des autres cas sont analogues) et notons $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ les deux racines de (E). Posons $\lambda = u_0$ et $\mu = \dfrac{1}{\sin(\theta)}\left(\dfrac{u_1}{\rho} - u_0\cos(\theta)\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons $P(n)$: « $u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big)$ ». Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.

- *Initialisation :* On a $\rho^0\big(\lambda\cos(0) + \mu\sin(0)\big) = \lambda = u_0$ et

$$\rho^1\big(\lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)\big) = \rho\left(u_0\cos(\theta) + \left(\frac{u_1}{\rho} - u_0\cos(\theta)\right)\right) = u_1.$$

  Ainsi $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- *Hérédité :* Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies et montrons que $P(n+2)$ est alors vraie. Par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a\rho^{n+1}\big(\lambda\cos((n+1)\theta) + \mu\sin((n+1)\theta)\big) + b\rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big) \\ &= \lambda\left(a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta) + b\rho^n\cos(n\theta)\right) + \mu\left(a\rho^{n+1}\sin((n+1)\theta) + b\rho^n\sin(n\theta)\right). \end{aligned}$$

  Or nous avons

$$\begin{aligned} a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta) + b\rho^n\cos(n\theta) &= \mathfrak{Re}\left(a\rho^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\right) + \mathfrak{Re}\left(b\rho^n e^{in\theta}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(a\big(\rho e^{i\theta}\big)^{n+1} + b\big(\rho e^{i\theta}\big)^n\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\big(\rho e^{i\theta}\big)^n\big(a\rho e^{i\theta} + b\big)\right) = \mathfrak{Re}\left(\big(\rho e^{i\theta}\big)^n\big(\rho e^{i\theta}\big)^2\right), \end{aligned}$$

  puisque $\rho e^{i\theta}$ est solution de (E). Ainsi

$$a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta) + b\rho^n\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}\left(\big(\rho e^{i\theta}\big)^{n+2}\right) = \rho^{n+2}\cos((n+2)\theta).$$

  De même on obtient que

$$a\rho^{n+1}\sin((n+1)\theta) + b\rho^n\sin(n\theta) = \mathfrak{Im}\left(\big(\rho e^{i\theta}\big)^{n+2}\right) = \rho^{n+2}\sin((n+2)\theta).$$

  Nous en déduisons que $u_{n+2} = \lambda\rho^{n+2}\cos((n+2)\theta) + \mu\rho^{n+2}\sin((n+2)\theta)$, c'est-à-dire que $P(n+2)$ est vraie.

Par récurrence, nous obtenons alors que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque : Cette démonstration n'est pas exigible mais elle fournit un bel exemple de démonstration par récurrence. Cependant elle n'est pas satisfaisante car elle nécessite d'avoir deviné au préalable les solutions dans les différents cas. Cela n'explique pas comment on a pu avoir l'idée de la forme des solutions. Nous verrons une autre preuve plus élégante dans le chapitre *Espaces vectoriels de dimension finie*.

Exemples :

- *La suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$.*
- *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$.*
- *La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 3y_n$.*