# III Fonctions usuelles

Voici un catalogue de (presque) toutes les fonctions usuelles que nous rencontrerons cette année. La plupart des résultats énoncés seront montrés dans les chapitres *Propriétés locales des fonctions : limites et continuité en un point*, *Propriétés globales des fonctions : continuité sur un intervalle* et *Dérivation*

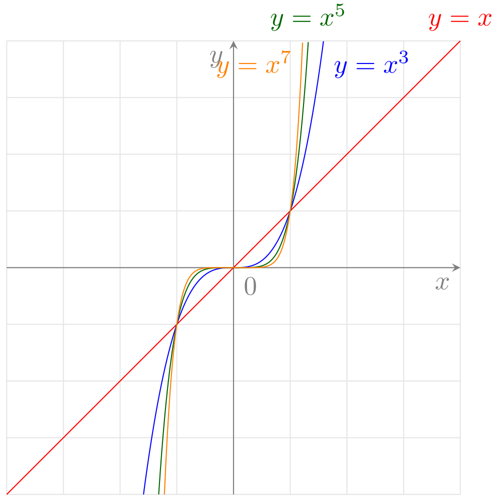
## 1) Les fonctions puissances d'un nombre entier

Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $x \longmapsto x^n$ est appelée fonction puissance $n^{\text{ième}}$.

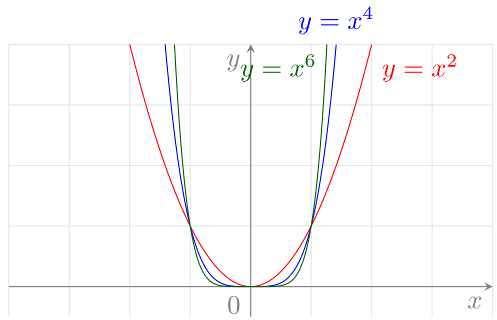
### a) Cas où $n \in \mathbb{N}$

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

- Si $n$ est pair (resp. impair), alors $x \longmapsto x^n$ est paire (resp. impaire).
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  - Si $n = 0$, sa dérivée est la fonction nulle.
  - Si $n \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.




CAS OÙ $n = 2k+1$ AVEC $k \in \mathbb{N}$



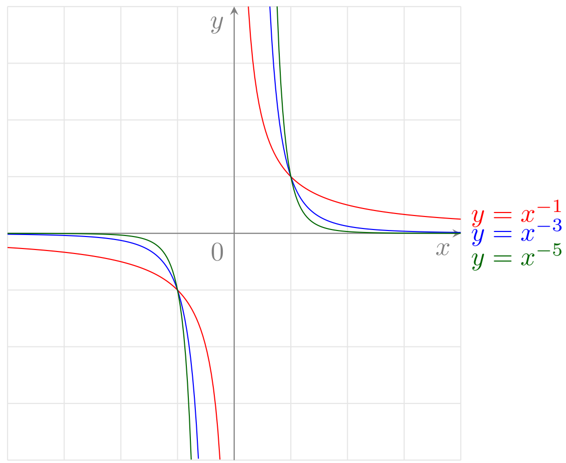

CAS OÙ $n = 2k$ AVEC $k \in \mathbb{N}^*$

### b) Cas où $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

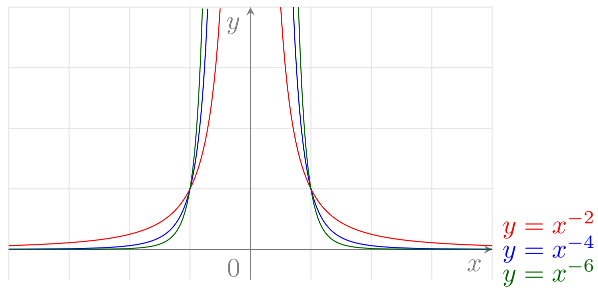
Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et :

- Si $n$ est pair (resp. impair), alors elle est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}^*$.
- Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto nx^{n-1}$.

Si $n = -1$, on l'appelle fonction inverse.




CAS OÙ $n = 2k+1$ AVEC $k \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

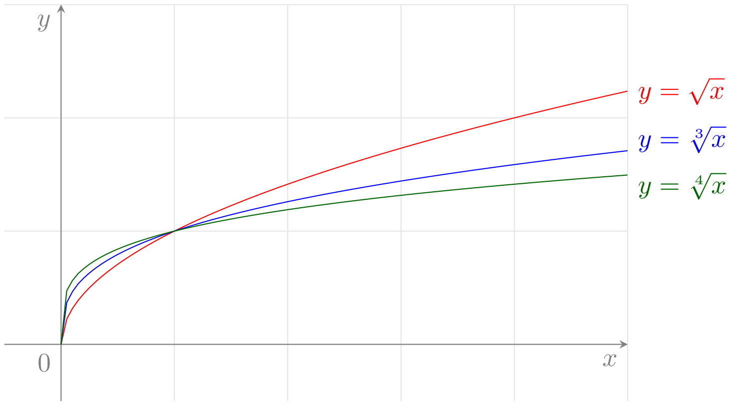



CAS OÙ $n = 2k$ AVEC $k \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

## 2) Les fonctions racine $n^{\text{ième}}$

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On l'appelle fonction racine $n^{\text{ième}}$. Il s'agit de la fonction réciproque de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

- Si $n$ est pair (resp. impair), alors $x \longmapsto x^n$ est paire (resp. impaire).
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.




**Remarque :** Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $q = \dfrac{p}{n} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors on définit $x^q = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $x^q = \sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$.

## 3) Les fonctions polynômiales et rationnelles

### a) Les fonctions polynômiales

**Définition.** Une fonction $P$ est dite polynômiale si il existe $p \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$, avec $a_p \neq 0$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k.$$

On dit que $p$ est le degré de $P$ et que $a_p$ est le coefficient dominant de $P$.

Une fonction polynômiale $P$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, si elle est de degré de $p$ et de coefficient dominant $a_p$, alors elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto a_p x^p$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Nous étudierons ces fonctions en détail dans le chapitre *Polynômes réels ou complexes*. Nous verrons notamment qu'une fonction polynômiale ne s'annule qu'en un nombre fini de réels appelés racines.

### b) Les fonctions rationnelles

**Définition.** Soient $P$ et $Q$ deux fonctions polynômiales. Notons $\mathcal{R}_Q$ l'ensemble (fini) des racines de $Q$. La fonction $R : x \longmapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{R}_Q$ est dite rationnelle.

Une fonction rationnelle $R : x \longmapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{R}_Q$. Notons $p$ et $q$ les degrés respectifs de $P$ et $Q$ et $a_p$ et $b_q$ les coefficients dominants (qui sont non nuls par définition du degré) respectifs de $P$ et $Q$. La fonction rationnelle $R$ possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q}$.

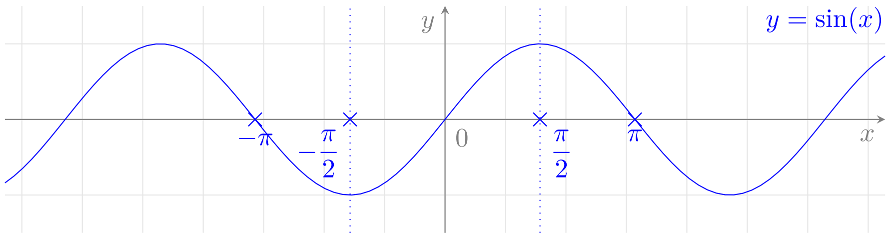
$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

## 4) Les fonctions trigonométriques

Nous verrons plus en détail d'autres propriétés de ces fonctions dans le chapitre *Nombres complexes et trigonométrie.*

### a) La fonction sinus

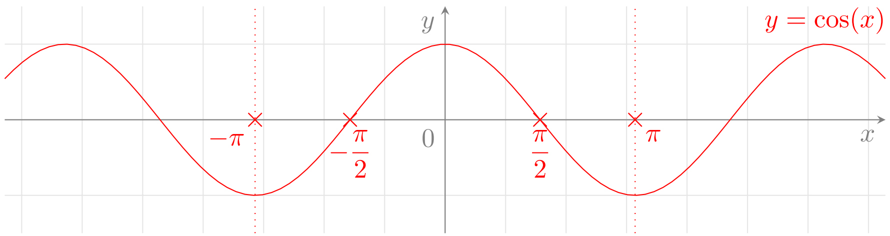
La fonction sinus, notée $\sin$, est définie, continue, dérivable, impaire, $2\pi$-périodique et bornée (par $1$) sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Sa dérivée est la fonction $\cos$.




Nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

### b) La fonction cosinus

La fonction cosinus, notée $\cos$, est définie, continue, dérivable, paire, $2\pi$-périodique et bornée (par $1$) sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\sin(x)$.




Nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.

### c) La fonction tangente

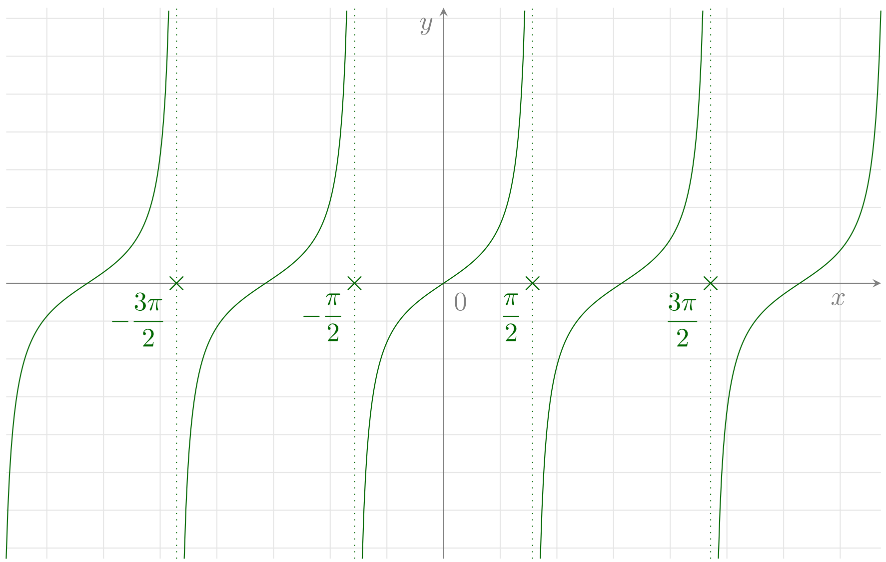
Notons $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo $\pi$.
La fonction tangente, notée $\tan$, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left(\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Nous avons :

- La fonction tangente est impaire et $\pi$-périodique sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
- $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan(x) = +\infty$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi\right[ \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



## 5) Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

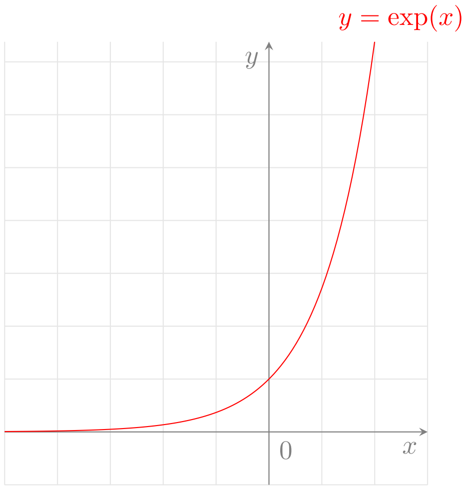
### a) La fonction exponentielle

On admet qu'il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est sa propre dérivée et qui vaut $1$ en $0$. On l'appelle fonction exponentielle et on la note $\exp$ ou $x \longmapsto e^x$. De plus :

- Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous réels $x$ et $y$, $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.
- Quelques limites à connaître :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Les deux premières limites peuvent se résumer par la phrase « l'exponentielle l'emporte sur les puissances » (mais dans une copie on préfèrera le terme de « croissances comparées »). Nous les montrerons dans le chapitre *Dérivation*. La troisième limite est la traduction de la dérivabilité de $\exp$ en $0$.




### b) La fonction logarithme népérien

Le théorème de la bijection entraîne que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est la réciproque de l'exponentielle : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$. De plus

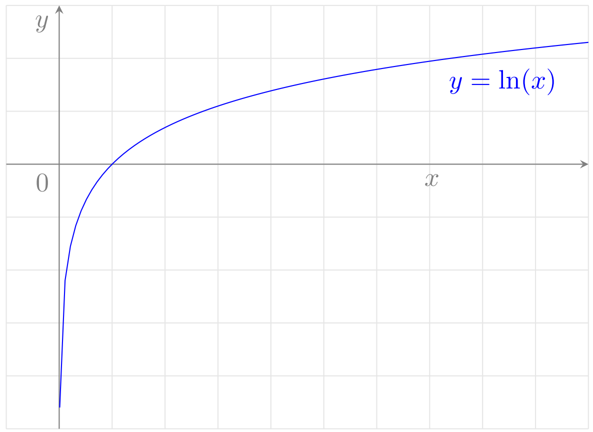
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$. Elle est donc strictement positive (resp. négative) sur $]1, +\infty[$ (resp. $]0, 1[$).
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus sa dérivée est $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- Pour tous $x$ et $y$ strictement positifs,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

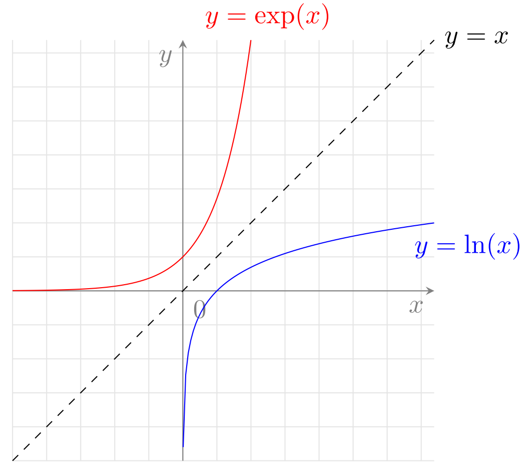
- Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
- Quelques limites à connaître :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Les deux premières limites peuvent se résumer par la phrase « les puissances l'emportent sur le logarithme » (mais dans une copie on préfèrera le terme de « croissances comparées »). Nous les montrerons dans le chapitre *Étude asymptotique et développements limités*. La troisième limite est la traduction de la dérivabilité de $x \longmapsto \ln(1+x)$ en $0$.



Illustrons graphiquement le fait que $\exp$ et $\ln$ sont des bijections réciproques :




## 6) Puissances à exposant réel

### a) Définition et propriétés

Cela nous permet de généraliser la notion de puissance à un exposant réel :

**Définition.** Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

**Proposition.** Nous avons, pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, $\alpha$ et $\beta$,

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \qquad \text{et} \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

### b) Les fonctions puissances d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$

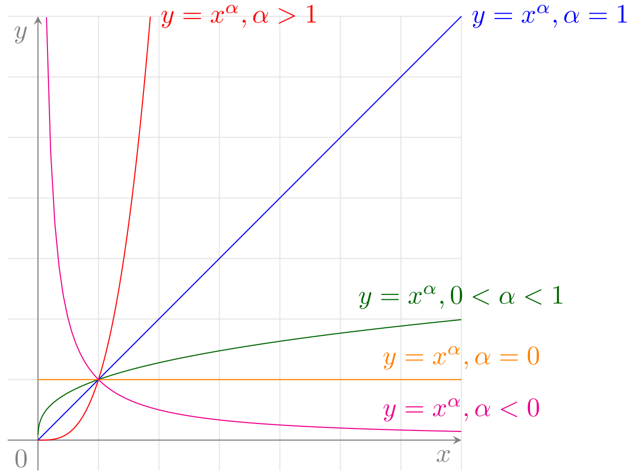
**Définition.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle puissance d'exposant $\alpha$ la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On pose $0^0 = 1$ et, si $\alpha > 0$, on pose $0^\alpha = 0$.

Nous avons :

- Si $\alpha \geqslant 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Si $\alpha < 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $\alpha \geqslant 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
  Si $\alpha < 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.



Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en $0$ dans le cas où la puissance est positive. Seules les puissances entières sont définies également sur $\mathbb{R}_-^*$.

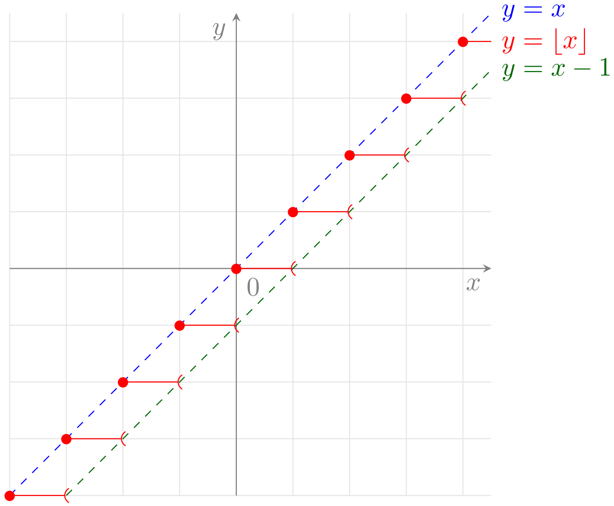
### c) Les fonctions exponentielles de base $a$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $a^x = e^{x \ln(a)}$. La fonction $x \longmapsto a^x$ est appelée exponentielle de base $a$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \ln(a)\, a^x$.

## 7) Autres fonctions usuelles

### a) La fonction partie entière

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$. On l'appelle fonction partie entière. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et constante sur chaque intervalle $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

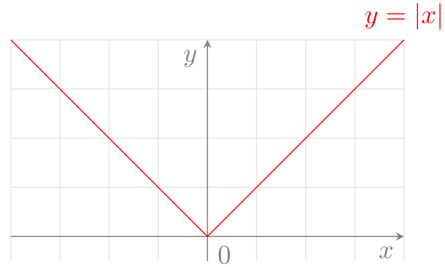



### b) La fonction valeur absolue

La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$. On l'appelle fonction valeur absolue. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$) et sa dérivée est la fonction constante égale à $1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. à $-1$ sur $\mathbb{R}_-^*$). Par contre elle n'est pas dérivable en $0$.




# IV Plan de l'étude d'une fonction

La méthodologie d'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la suivante :

1. On détermine le domaine de définition $D_f$ de la fonction $f$.
2. On cherche à restreindre le domaine d'étude de $f$ en déterminant des propriété de symétrie (périodicité, parité).
3. On précise les intervalles de $D_f$ sur lesquels $f$ est continue et les intervalles sur lesquels $f$ est dérivable.
4. On calcule $f'$ et on étudie son signe sur chaque intervalle où $f$ est dérivable.
5. On construit le tableau de variations de $f$, conséquence de l'étude du signe de $f'$.
6. On étudie les limites aux bords des intervalles de $D_f$.
7. On détermine des tangentes en des points particuliers. On cherche d'éventuelles asymptotes et branches paraboliques (souvent ce sera précisé dans l'énoncé).
8. On trace $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé. Au préalable on place quelques points particuliers (notamment les réels $x$ tels que $f'(x) = 0$), on trace éventuelles tangentes et asymptotes que l'on a déterminées et on place d'autres points intermédiaires pour aider la construction.

***Exemple :*** *Considérons la fonction* $f : x \longmapsto 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$.