Exemple d'étude d'une fonction

Étudions la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-1}$ est défini si et seulement si $x^2 - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $|x| \geqslant 1$. Ainsi $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Il n'y a pas de symétrie évidente (périodicité, parité).
3. Les fonctions $x \longmapsto 2x - 1$ et $x \longmapsto x^2 - 1$ sont continues et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-$. Par composition, nous obtenons que
   - f est continue sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.
   - f est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.
4. Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}\left(\sqrt{x^2-1} + \dfrac{x}{2}\right)$.

   Si $x > 1$, alors $f'(x) > 0$. Supposons que $x < -1$. Puisque les fonctions carrées et racines carrées sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, nous avons

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \sqrt{x^2-1} \geqslant \frac{-x}{2} \iff x^2 - 1 \geqslant \frac{x^2}{4} \iff x^2 \geqslant \frac{4}{3} \iff -x \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

   Notons que $-2/\sqrt{3} < -1$. Nous en déduisons que f est croissante sur $]-\infty, -2/\sqrt{3}]$ et sur $[1, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $[-2/\sqrt{3}, 1]$. Nous avons $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ et $f(-2/\sqrt{3}) = -1 - \sqrt{3}$.
5. Nous obtenons donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-2/\sqrt{3}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$		$\|$	$+$	
			$-1-\sqrt{3}$						$+\infty$
f	$-\infty$	↗		↘	-3		1	↗	

6. Dans le tableau ci-dessus, nous avons ajouté les limites de f en $\pm\infty$. Justifions-les :
   - Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u} = +\infty$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$, nous obtenons finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - On ne peut pas faire la même chose en $-\infty$ puisqu'on rencontre une forme indéterminée $(-\infty + \infty)$. Procédons autrement : remarquons que

$$\forall x \in]-\infty, -1], \qquad f(x) = -1 + 2x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1 + x\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right).$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ et que la fonction racine est continue en 1, nous obtenons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right) = 1$. Nous en déduisons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

7. Pour tout $x < -1$, $x - \sqrt{x^2-1} \neq 0$ et donc

$$f(x) - (x-1) = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}.$$

Puisque $\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\infty$, nous obtenons alors que $\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$.
Ainsi la droite $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. De plus,

$$\forall x \in \left]-\infty, -1\right[, \qquad f(x) - (x-1) \leqslant 0$$

donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de son asymptote.
De même, pour tout $x > 1$,

$$f(x) - (3x-1) = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{(x^2-1) - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}.$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = +\infty$, nous obtenons alors que $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (3x-1)\big) = 0$.
Ainsi la droite $y = 3x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. De plus,

$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[, \qquad f(x) - (3x-1) \leqslant 0$$

donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de son asymptote.

8. Traçons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :