II Espérance d'une variable aléatoire à densité

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire réelle à densité et f_X une densité de X.

1) Espérance

Définition. *On dit que X admet une espérance si l'intégrale* $\boxed{}$ *converge. Dans ce cas, on appelle espérance de X, et on note $\mathbb{E}(X)$, le réel* $\boxed{}$

Remarque : Cette définition ne dépend pas du choix d'une densité de X puisque deux densités ne diffèrent que d'un nombre fini de points et que la valeur d'une intégrale convergente ne change pas si on change l'intégrande en un nombre fini de points.

Exemple : *Nous verrons de nombreux exemples dans le paragraphe III et en TD. Voyons un exemple très classique de v.a n'admettant par d'espérance. On dit qu'une v.a suit une loi de Cauchy si elle admet pour densité $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.*

Proposition (positivité de l'espérance). *Si X admet une espérance et $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.*

Démonstration.

$\square$

Proposition (linéarité de l'espérance). *Si X admette une espérance alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $aX+b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.*

Démonstration. On a vu dans la paragraphe précédent que $Y = aX+b$ admet $f_Y : x \longmapsto \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ pour densité.

$\square$

Nous en déduisons :

Proposition/Définition. *Si X admet une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire à densité admettant une espérance nulle. On dit alors que $X - \mathbb{E}(X)$ est la variable centrée associée à X.*

2) Théorème de transfert pour les variables aléatoires à densité

Ce théorème est à la limite du programme (mais il le sera en ECS2) mais il est l'analogue parfait de celui vu pour les v.a.r.d :

Théorème 5 (de transfert). *On suppose que X prend presque sûrement ses valeurs dans un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit φ une fonction continue sur $]a,b[$ sauf éventuellement un nombre fini de points. Alors $\varphi(X)$ est également une variable à densité. Par ailleurs $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale*

converge absolument. Dans ce cas,

Démonstration. Admis. □

Exemples : *Soit X une v.a.r à densité f_X.*

3) Moments d'une variable aléatoire à densité

Ce paragraphe est à la limite du programme (mais il le sera en ECS2) mais il est l'analogue parfait de celui vu pour les v.a.r.d :

Définition. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r\, f_X(t)\,dt$ converge. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel $m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_X(t)\,dt$.*

Remarques :

- Le moment d'ordre 1 d'une v.a.r à densité, s'il existe, est simplement l'espérance de X.
- D'après le théorème de transfert, si X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, alors $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$. Autrement dit, X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

Proposition. *Si X est une v.a. à densité admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ alors, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, X admet un moment d'ordre k.*

Démonstration. Supposons que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0,r]\!]$. Si $t \in \mathbb{R}$, alors

- ou bien $|t| \leqslant 1$ et alors $|t|^k \leqslant 1$,
- ou bien $|t| > 1$ et alors $|t|^k < |t|^r$,

et donc $|x|^k \leqslant 1 + |x|^r$. Ainsi $|t|^k\, f_X(t) \leqslant (1+|t|^r) f_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|^r)\, f_X(t)\,dt$ converge, nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k\, f_X(t)\,dt$ aussi. Ainsi X admet un moment d'ordre k. □

Si X admet un moment d'ordre 2, alors elle admet une espérance et donc $(X-\mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2)$ aussi par linéarité.

Définition. *Si X admet un moment d'ordre 2, alors on appelle variance de X le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)$.*

On a encore $\mathbb{V}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mathbb{E}(X))^2\, f_X(t)\,dt$ d'après la formule de transfert.

Proposition. *Si X admet un moment d'ordre 2, alors :*

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$,
2. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ *(formule de Koenig-Huygens),*
3. *Si $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Définition. *Si X admet un moment d'ordre 2, alors on appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*

Proposition/Définition. *Si X admet un moment d'ordre 2, alors $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ admet une espérance nulle et une variance égale à 1. On dit que X^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

III Lois de variables à densité usuelles

1) Loi uniforme

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ tel que $a < b$.

Définition. *On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si X admet pour densité*

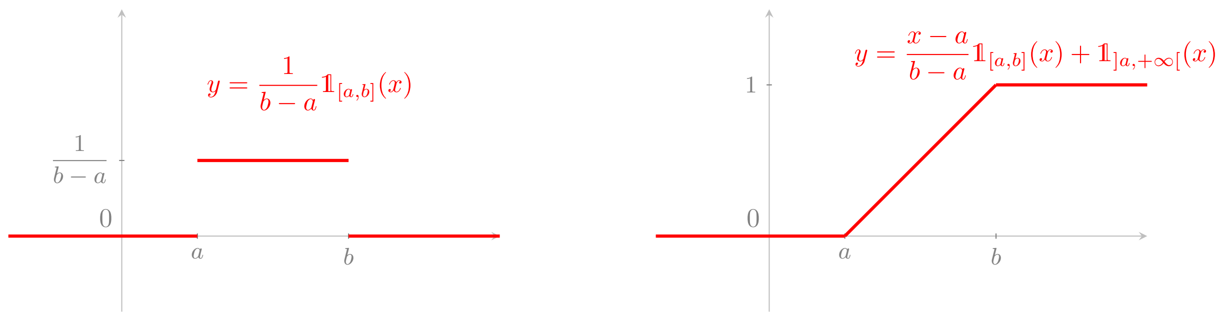
$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \end{cases}.$$

Remarques :

- Puisque $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$, on dit aussi que X suit la loi uniforme sur $]a, b[$ ou sur $]a, b]$ ou encore sur $[a, b[$.
- La densité d'une v.a. X de loi uniforme sur $[a, b]$ s'écrit encore $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.
- On vérifie que f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = 1$.

Proposition. *La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$ est* $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$ *ou encore* $F : x \longmapsto \dfrac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{]a,+\infty[}(x)$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.



Proposition. *On a $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ si et seulement si $X = a + (b-a)U \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

2) Loi exponentielle

Définition. *On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X admet pour densité*

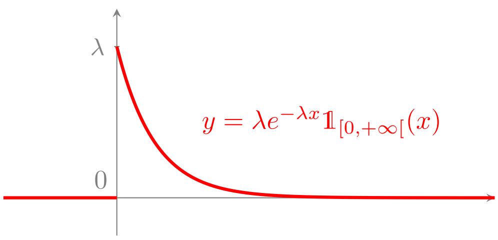
$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}.$$

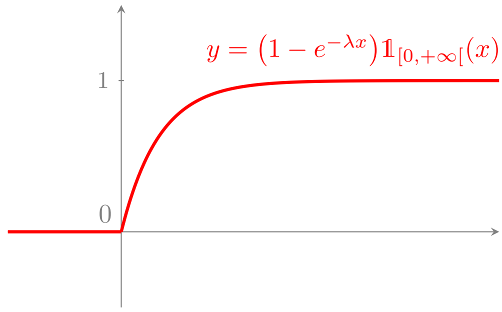
Remarques :

- On a déjà montré (cf. fin du paragraphe I2) que f est une densité.
- Puisque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, on peut aussi considérer que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
- La densité d'une v.a. X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ s'écrit encore $f : x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

Proposition. *La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est* $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ *ou encore* $F : x \longmapsto (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.





Proposition. *On a $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ si et seulement si $Y = \dfrac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.*

Démonstration.

$\square$

Proposition. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.*

Démonstration.

□

Proposition (absence de mémoire). *Si X suit une loi exponentielle, alors elle vérifie la propriété d'absence de mémoire :*

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad \mathbb{P}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y).$$

DÉMONSTRATION. ⇝ EXERCICE.

Remarques :

- Si $\mathbb{P}(X > x) > 0$, alors cette propriété se réécrit $\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > y)$.
- Interprétation : Si X modélise la durée de vie de A (un individu, un objet, etc.), la propriété que X est sans mémoire exprime que A ne vieillit pas : si A a vécu x années, la probabilité pour qu'il vive encore y années est la même que la probabilité qu'il vive y année alors qu'il vient de naître. C'est l'hypothèse que l'on fait généralement lorsque A est un composant élextrique, une ampoule, un homard, etc.
- On peut montrer (cf. TD) que si X est une variable aléatoire à valeurs positives, qui n'est pas presque sûrement nulle et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, alors elle suit une loi exponentielle .

3) Loi normale

a) Loi normale centrée réduite

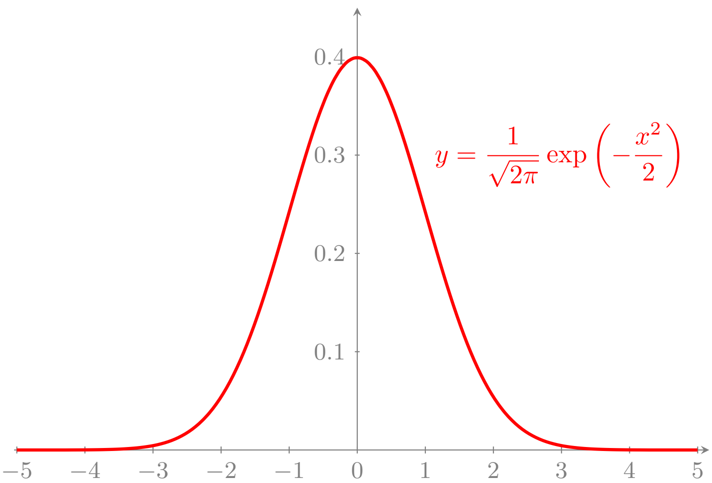
Définition. *On dit que X suit la loi normale centrée réduite, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, si X admet pour densité*

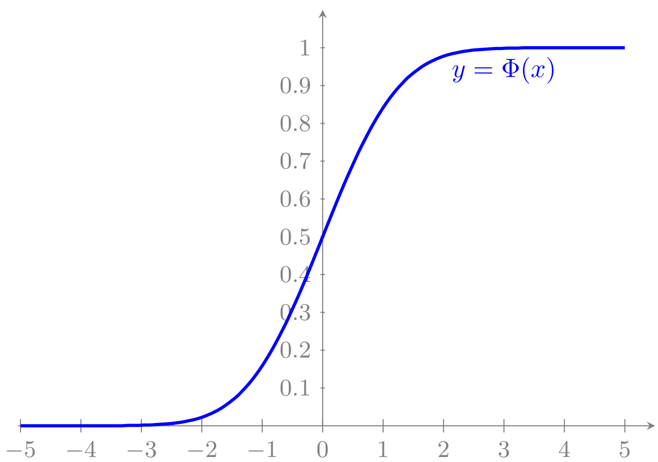
$$\varphi : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

On note Φ la fonction de répartition de X.

Remarques :

- On vérifie que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ et on a vu en DM que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = 1$.
- Il n'existe pas d'expression analytique de la fonction de répartition Φ, c'est-à-dire qu'elle ne s'exprime pas à partir de fonctions usuelles (mais devient elle-même une fonction usuelle). On utilise en général des tables de loi (ou un logiciel comme Scilab).
- C'est l'une des lois les plus importants en probabilités. Elle intervient dans le très célèbre théorème central limite (dont on verra des cas particuliers dès le chapitre suivant).





Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.*

⇝ EXERCICE.

Proposition. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet un moment d'ordre 2. De plus $\mathbb{E}(X) = 0$ (elle est centrée) et $\mathbb{V}(X) = 1$ (elle est réduite).*

Démonstration.

□

b) Loi normale (ou gaussienne ou de Laplace-Gauss)

Définition. *On dit que X suit la loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si X admet pour densité*

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Proposition. *On a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.*

Démonstration.

□

Proposition. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*

Démonstration.

□

Remarque : On parle aussi de loi normale de moyenne m et de variance σ^2.