Plan d'étude d'une intégrale généralisée

I Convergence de l'intégrale

On considère l'intégrale généralisée d'une fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On précise les ensembles de définition et de continuité de f. Si f est continue par morceaux, alors on écrit l'intégrale comme la somme d'intégrales de fonctions continues (il y en a un nombre fini puisqu'une fonction continue par morceaux admet un nombre fini de discontinuité).
2. On garde en tête que l'intégrale de f sur tout segment sur lequel elle est continue est bien définie. On repère la (ou les) borne(s) de l'intégrale pour laquelle (lesquelles) elle est impropre (un point en lequel f n'est pas continue ou $\pm\infty$). Si l'intégrale est impropre en les deux bornes, alors on sépare l'intégrale en deux avec la relation de Chasles et on étudie les deux intégrales séparément.

   ⚠ Il se peut que l'on rencontre un exemple où f n'est pas définie en un point qui n'est pas une borne de l'intégrale. Dans ce cas on se ramène à deux intégrales et on les étudie aussi séparément.
3. Considérons une intégrale impropre en seulement une de ses bornes.
   a. Si la borne en question est finie, on vérifie si f est pas prolongeable par continuité en cette borne. Dans ce cas l'intégrale est faussement impropre et elle converge.
   b. On recherche éventuellement une primitive F de f (en utilisant notamment intégration par partie et changement de variables). Si c'est le cas, on vérifie si F admet ou non une limite finie en cette borne.
4. Considérons toujours une intégrale impropre en seulement une de ses bornes. Si f change de signe au voisinage de cette borne, alors on étudie l'intégrale impropre de $|f|$, c'est-à-dire on détermine si l'intégrale converge absolument (auquel cas elle converge). Si f ne change pas de signe, alors on peut supposer qu'elle est positive (quitte à se ramener à une fonction positive en considérant $-f$) et
   a. Pour montrer que l'intégrale converge, on peut chercher une majoration par une fonction positive simple dont on sait déterminer facilement que son intégrale converge. Pour montrer que l'intégrale diverge, on peut chercher une minoration par une fonction positive simple dont on sait déterminer facilement que son intégrale diverge.
   b. On peut aussi montrer que f est équivalente à une fonction positive au voisinage de la borne en question. L'intégrale de f a alors la même nature que celle de son équivalent.
   c. Enfin, on peut essayer de montrer que f est négligeable devant une fonction de Riemann :
      - Supposons que la borne est $+\infty$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$, alors l'intégrale converge. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(f(t)\right)$, alors l'intégrale diverge.
      - Supposons que la borne est $-\infty$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|t|^\alpha}\right)$, alors l'intégrale converge. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{|t|^\alpha} \underset{-\infty}{=} o\left(f(t)\right)$, alors l'intégrale diverge.
      - Supposons que la borne en question est la borne inférieure et qu'elle est finie (disons $a \in \mathbb{R}$). S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) \underset{a^+}{=} o\left(\dfrac{1}{(t-a)^\alpha}\right)$, alors l'intégrale converge. S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{(t-a)^\alpha} \underset{a^+}{=} o\left(f(t)\right)$, alors l'intégrale diverge.
      - Supposons que la borne en question est la borne supérieure et qu'elle est finie (disons $b \in \mathbb{R}$). S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) \underset{b^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(b-t)^\alpha}\right)$, alors l'intégrale converge. S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{(b-t)^\alpha} \underset{b^-}{=} o\left(f(t)\right)$, alors l'intégrale diverge.

II Calcul de l'intégrale

Si on a montré que l'intégrale de f sur $]a,b[$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) converge, alors on peut essayer de la calculer.

1. On peut d'abord chercher une primitive F de f sur I. On se donne alors $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < A \leqslant B < b$ et on écrit que $\displaystyle\int_A^B f(t)\,dt = F(A) - F(B)$. On fait ensuite tendre A vers a et B vers b.
2. Si $f = u'v$ avec u et v deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$, alors on peut réaliser une intégration par parties sur un intervalle $[A,B] \subset]a,b[$ quelconque, puis faire tendre A vers a et B vers b.
3. Supposons qu'il existe g continue sur $]a,b[$ et Φ de classe C^1 sur $]a,b[$ tel que

$$\forall t \in]a,b[, \qquad f(t) = g(\Phi(t))\Phi'(t).$$

   On peut alors réaliser le changement de variable $x = \Phi(t)$ sur un intervalle $[A,B] \subset]a,b[$ quelconque, puis faire tendre A vers a et B vers b.