Chapitre 25

Comparaison locale de fonctions

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f, g, h, φ désignent des fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $x_0 \in I$ ou une extrémité de I dans $\overline{\mathbb{R}}$.

I Fonction négligeable devant une autre

1) Définition et premiers exemples

Définition 1. *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si il existe un voisinage*[1] *V de x_0 et une fonction $\varepsilon : I \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et*

$$\forall x \in I \cap V, \qquad f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$.

Remarques :

- Par abus de notation, on dit aussi que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de x_0.
- Si h est une autre fonction définie sur I et à valeurs réelles, alors on écrit $f(x) \underset{x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ pour dire que la fonction $f - g$ est négligeable devant h au voisinage de x_0. On place toujours le $o(h(x))$ en dernière position et on évitera ainsi d'écrire $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x)) + g(x)$.

Exemple : *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\varepsilon(x)}{x^2}$ avec $\varepsilon(x) = x$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on a $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.*

Dans la pratique on utilise généralement le résultat suivant :

Théorème 2. *Si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0 dans le cas où $x_0 \in I$), alors on a*

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Le cas particulier où g est la fonction constante égale à 1 sur I dans le théorème précédent donne :

Proposition 3. *Si $x_0 \in I$ ou une extrémité de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

On n'écrit jamais $f(x) \underset{x_0}{=} o(0)$. Cela n'a aucun sens sauf dans le cas où f est constante au voisinage de x_0.

2) Propriétés

Les preuves de ce paragraphe sont laissées en exercices. Elles sont analogues à celles du chapitre *Étude asymptotique des suites réelles.*

Proposition 4 (transitivité). *Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*

1. Rappelons qu'un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un intervalle du type $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) avec $A \in \mathbb{R}$. Un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle du ouvert contenant x_0 que l'on prend en général centrée en x_0, i.e. du type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, avec $\delta > 0$.

Proposition 5 (opérations sur les fonctions négligeables).

1. (compatibilité avec le produit) *Si* $f \underset{x_0}{=} o(h)$ *et* $g \underset{x_0}{=} o(\varphi)$, *alors* $fg \underset{x_0}{=} o(h\varphi)$.
2. (multiplication par une constante) *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda f \underset{x_0}{=} o(g)$.
3. (multiplication par une fonction) *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$, *alors* $fh \underset{x_0}{=} o(gh)$.
4. (valeur absolue) *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$, *alors* $|f| \underset{x_0}{=} o(|g|)$.
5. (inverse) *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ *et si* f *et* g *ne s'annulent pas au voisinage de* x_0 *(sauf éventuellement en* x_0 *dans le cas où* $x_0 \in I$*), alors* $\dfrac{1}{g} \underset{x_0}{=} o\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

La relation de négligeabilité n'est pas compatible avec la somme : si $f \underset{x_0}{=} o(h)$ et $g \underset{x_0}{=} o(\varphi)$, alors il est faux en général que $f+g \underset{x_0}{=} o(h+\varphi)$. Par contre :

Proposition 6. *Si* $f \underset{x_0}{=} o(\varphi)$ *et* $g \underset{x_0}{=} o(\varphi)$, *alors* $f+g \underset{x_0}{=} o(\varphi)$.

Remarque : Il découle de ces propositions que $o(g) - o(g) = o(g)$ et non $o(g) - o(g) = 0$. Insistons bien sur le fait que $o(g)$ ne désigne pas une fonction en particulier mais n'importe quelle fonction négligeable devant g.

Proposition 7 (substitution [1] dans un petit o). *Supposons que* $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

1. *Soit* u *une fonction définie sur intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles. Soit* t_0 *un point de* J *ou une de ses extrémités dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si* $u(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} x_0$, *alors* $f(u(t)) \underset{x_0}{=} o\big(g(u(t))\big)$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, *alors* $f(u_n) \underset{+\infty}{=} o\big(g(u_n)\big)$.

Démonstration.

1. Supposons que $x_0 \in I$ et que $t_0 \in J$ (les autres cas sont analogues). Par hypothèse :
   - Il existe $\delta > 0$ et une fonction $\varepsilon : I \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et, pour tout $x \in I \cap \big(]x_0-\delta, x_0+\delta[\big)$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
   - Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in J \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $|u(t)-x_0| < \delta$.

   Il s'ensuit que la fonction $\widetilde{\varepsilon} : t \in J \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[\longmapsto \varepsilon(u(t))$ est bien définie. De plus, le théorème de composition des limites entraîne que $\lim\limits_{t\to t_0} \widetilde{\varepsilon}(y) = 0$. Enfin, pour tout $t \in J \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $f(u(t)) = \widetilde{\varepsilon}(t)g(u(t))$. Par conséquent $f(u(t)) \underset{x_0}{=} o\big(g(u(t))\big)$.
2. Analogue au point précédent. □

3) Comparaison de fonctions usuelles

Théorème 8. *Soient* α, β, a *et* b *des réels.*

1. *Si* $\alpha < \beta$, *alors* $(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o((\ln(x))^\beta)$ *et* $(\ln(x))^\alpha \underset{0}{=} o((\ln(x))^\beta)$.
2. *Si* $\alpha < \beta$, *alors* $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ *et* $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$.
3. *Si* $0 < a < b$, *alors* $a^x \underset{+\infty}{=} o(b^x)$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Réécrivons les croissances comparées en terme de fonctions négligeables :

Théorème 9 (croissances comparées). *Soient* α, β *et* a *des réels.*

1. *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *alors* $(\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ *et* $|\ln(x)|^\beta \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$
2. *Si* $a > 1$ *et* $\alpha > 0$, *alors* $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(a^x)$ *et* $|x|^\alpha \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{a^x}\right)$

1. On parle aussi de composition à droite.

II Fonctions équivalentes

1) Définition et premiers exemples

Définition 10. *On dit que f est équivalent à g au voisinage de x_0 si il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\alpha : I \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$ et*

$$\forall x \in I \cap V, \qquad f(x) = \alpha(x)g(x).$$

On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Dans la pratique on utilise généralement le résultat suivant pour montrer que deux fonctions sont équivalentes :

Théorème 11. *Si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0 dans le cas où $x_0 \in I$), alors on a*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple : *La fonction identité sur $\mathbb{R}$ ne s'annule qu'en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.*

Le cas particulier où g est une fonction constante différente de la fonction nulle dans le théorème précédent donne :

Proposition 12. *Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.*

⚠ On n'écrit jamais $f(x) \underset{x_0}{\sim} 0$. Cela n'a aucun sens sauf dans le cas où f est constante au voisinage de x_0.

2) Propriétés

Les preuves de ce paragraphe sont également laissées en exercices. Elles sont analogues à celles du chapitre *Etude asymptotique des suites réelles.*

Soient f, g, h et φ des fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $x_0 \in I$ ou une extrémité de I dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 13 (lien avec les fonctions négligeables). *On a*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \underset{x_0}{=} g(x) + o(g(x)).$$

Proposition 14 ($\sim$ est une relation d'équivalence). *Nous avons*

1. (réflexivité) $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.
2. (symétrie) $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *si et seulement si* $g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.
3. (transitivité) *Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$, *alors* $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$.

Proposition 15 (équivalence et limite).

1. *Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si l'une des deux fonctions admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors l'autre admet la même limite.*
2. *Si les deux fonctions convergent vers une même limite finie non nulle, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.*

Remarque : Le deuxième point n'est qu'une réciproque partielle du premier point. On ne peut pas conclure dans le cas où les deux fonctions convergent toutes les deux vers 0, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Par exemple les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ admettent toutes les deux 0 pour limite en 0 mais ne sont pas équivalentes. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ admettent toutes les deux $+\infty$ pour limite en 0 mais ne sont pas équivalentes.

Proposition 16 (opérations sur les fonctions équivalentes).

1. (compatibilité avec le produit) *Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et* $h(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, *alors* $f(x)h(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)\varphi(x)$.
2. (multiplication par une constante) *Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\lambda f(x) \underset{x_0}{\sim} \lambda g(x)$.
3. (valeur absolue) *Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, *alors* $|f(x)| \underset{x_0}{\sim} |g(x)|$.
4. (inverse) *Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et si* f *et* g *ne s'annulent pas au voisinage de* x_0 *(sauf éventuellement en* x_0 *dans le cas où* $x_0 \in I$*), alors* $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$.
5. (compatibilité avec le quotient) *Si* $h(x) \underset{x_0}{\sim} \varphi(x)$, $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et si* f *et* g *ne s'annulent pas au voisinage de* x_0 *(sauf éventuellement en* x_0 *dans le cas où* $x_0 \in I$*), alors* $\dfrac{h(x)}{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$.
6. (compatibilité avec les puissances) *Supposons que* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.
   - *Si* $k \in \mathbb{N}$, *alors* $f(x)^k \underset{x_0}{\sim} g(x)^k$.
   - *Si* $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ *et si* f *et* g *ne s'annulent pas au voisinage de* x_0 *(sauf éventuellement en* x_0 *dans le cas où* $x_0 \in I$*), alors* $f(x)^k \underset{x_0}{\sim} g(x)^k$.
   - *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et si* f *et* g *sont strictement positives au voisinage de* x_0 *(sauf éventuellement en* x_0 *dans le cas où* $x_0 \in I$*), alors* $f(x)^\alpha \underset{x_0}{\sim} g(x)^\alpha$.

Remarques :

- La compatibilité avec les puissances n'est pas valable si k ou α dépend de n.

  Par exemple on a $1 + \dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$ *et on a déjà vu que* $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \underset{+\infty}{\sim} e$.
- L'équivalence n'est pas compatible avec la somme.

  Considérons l'exemple où, pour tout $x \in R$, $f(x) = -x - 1$, $g(x) = -x$, $h(x) = x$ *et* $\varphi(x) = x + 1$. *On a* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \varphi(x)$. *Mais* $f + h$ *est la fonction constante égale à* -1 *et* $g + \varphi$ *est la fonction constante égale à* 1 *donc* $f + h$ *n'est pas équivalente à* $g + \varphi$.
- L'équivalence n'est pas compatible avec la composition à gauche par une fonction (à part une fonction puissance comme on l'a vu).

  Par exemple $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ *mais* $x \longmapsto e^{x^2+x}$ *et* $x \longmapsto e^{x^2}$ *ne sont pas équivalente puisque* $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et non* 1.

Par contre, on peut composer à droite par une fonction admettant x_0 pour limite :

Proposition 17 (substitution dans un équivalent). *Supposons que* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

1. *Soit* u *une fonction définie sur intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles. Soit* t_0 *un point de* J *ou une de ses extrémités dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si* $u(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} x_0$, *alors* $f(u(t)) \underset{x_0}{\sim} g(u(t))$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Si* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$, *alors* $f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} g(u_n)$.

Démonstration. Puisque $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ est équivalent à $f(x) - g(x) \underset{x_0}{=} g(x)$, ce théorème est une conséquence du théorème de substitution dans un petit o. □

3) Équivalents usuels

Proposition 18. *Soit* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $q < p$. *Soit* $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=q}^{p} a_k x^k$ *avec* $a_q, \ldots, a_p$ *des réels tels que* $a_q \neq 0$ *et* $a_q \neq 0$. *Alors*

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \qquad \text{et} \qquad P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Lemme 19. *Si f est une fonction dérivable sur un voisinage de 0 telle que $f'(0) \neq 0$, alors*

$$f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} xf'(0)$$

Démonstration. Si f est dérivable sur dérivable sur un voisinage V de 0, alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$. Si $f'(0) \neq 0$, alors nous en déduisons que la fonction

$$\alpha : x \in V \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{xf'(0)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

admet 1 pour limite en 0 et, pour tout $x \in V$, nous avons $f(x) - f(0) = \alpha(x)xf'(0)$. $\square$

Théorème 20. *Nous avons*

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.
3. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
4. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.
5. $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
6. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$.
7. $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$.

Démonstration. Ces sept équivalents sont tous des cas particuliers du théorème précédent avec

1. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et $f'(0) = 1$.
2. $f : x \mapsto e^x - 1$ et $f'(0) = 1$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $f'(0) = \alpha$.
4. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $f'(0) = 1$.
5. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
6. $f : x \mapsto \tan(x)$ et $f'(0) = 1$.
7. $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ et $f'(0) = 1$.

$\square$

Remarque : Le théorème précédent et le point 2. de la proposition 17 permettent de retrouver le théorème sur les équivalents de suites usuelles.

Exemples :

- *Déterminons un équivalent simple de* $\cos(\sqrt{x}) - 1$ *en* 0^+. *Puisque* $\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, *on en déduit (par substitution) que* $\cos(\sqrt{x}) - 1 \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{x}{2}$.
- *Déterminons un équivalent simple de* $\cos^4(\sqrt{x}) - 1$ *en* 0. *On remarque déjà que, pour tout* $x > 0$, $\cos^4(\sqrt{x}) - 1 = \Big(1 + \big(\underbrace{\cos(\sqrt{x}) - 1}_{u(x)}\big)\Big)^4 - 1$. *Puisque* $u(x) = \cos(\sqrt{x}) - 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, *on a (par substitution)* $\cos^4(\sqrt{x}) - 1 = (1+u(x))^4 - 1 \underset{0^+}{\sim} 4u(x) \underset{0^+}{\sim} -2x$.
- *Déterminons un équivalent simple de* $\dfrac{x^x - 1}{x}$ *en* 0^+. *On remarque déjà que, pour tout* $x > 0$, $x^x - 1 = e^{x\ln(x)} - 1$. *Par croissances comparées, nous savons que* $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

  Puisque $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, *nous obtenons (par substitution) que* $e^{x\ln(x)} - 1 \underset{0^+}{\sim} x\ln(x)$. *Ainsi* $\dfrac{x^x-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln(x)}-1}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x\ln(x)}{x}$ *et donc nous avons finalement* $\dfrac{x^x-1}{x} \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$.
- *Déterminons un équivalent simple de* $\ln(x)$ *en* 1. *On remarque déjà que, pour tout* $x > 0$, $\ln(x) = \ln(1 + (x-1))$. *On a* $x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ *et* $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. *Par substitution, nous obtenons que* $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.