Chapitre 22

Variables aléatoires discrètes

I Variables aléatoires réelles discrètes

1) Définition

Définition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable quelconque. Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est dite discrète si $X(\Omega)$ est finie (on parle alors de variable aléatoire finie) ou dénombrable (on parle alors de variable aléatoire discrète infinie).*

Remarques :

- Pour abréger, on pourra écrire *v.a.r.d* au lieu de *variable aléatoire réelle discrète*.
- Si X est une v.a.r.d, alors $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et on peut donc numéroter ses éléments : on note $X(\Omega) = \{x_i \,|\, i \in I\}$, avec I une partie de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$ éventuellement).

Proposition 2. *Une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisable quelconque $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et*

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad [X = x] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

Démonstration.

□

2) Tribu engendrée par une variable aléatoire réelle discrète

Proposition 3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. On l'appelle le système complet d'événements associé à X.*

Démonstration.

□

Définition 4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle tribu engendrée par X la tribu engendrée par le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant tous les $[X = x]$, $x \in X(\Omega)$. On la note $\mathcal{A}_X$ ou $\sigma(X)$.*

Remarque : Intuitivement $\mathcal{A}_X$, la tribu engendré par X, correspond à tous les évènements qui donnent de l'information sur X et que l'on peut décrire par X.

3) Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque. On a vu dans le chapitre précédent que la loi d'une variable aléatoire réelle X est l'application $\mathbb{P}_X$ qui à tout intervalle I de $\mathbb{R}$ associe la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$.

Proposition 5. *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors la donnée de la loi de X est équivalente à la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et de $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.*

Démonstration.

□

Définition 6. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes toutes deux définies sur des espaces probabilisés (pas forcément les mêmes). On dit que X et Y sont égales en lois (ou qu'elles ont la même loi) si $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$. On note alors $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.*

Proposition 7. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$ converge et $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.*

Démonstration. Cela découle du fait que $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A})$. □

Théorème 8. *Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1$. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels deux à deux distincts. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \,|\, i \in I\}$ et, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.*

Démonstration. On considère $\Omega = \{x_i \,|\, i \in I\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \in A} p_i \end{array}$ et X l'application identité de Ω. Les conditions sur $(p_i)_{i \in I}$ entraînent que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On a bien $X(\Omega) = \Omega = \{x_i \,|\, i \in I\}$ et, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$. □

Remarques :

- Il n'y a unicité ni de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ni de la variable aléatoire X.
- A priori Ω peut comporter des événements élémentaires de probabilité nulle et, dans ce cas, il se peut que la probabilité que X prenne certaines valeurs de $X(\Omega)$ soit nulle. Mais en général on suppose que Ω est tel que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

Définition 9. *Si $\mathscr{L}$ est une application définie sur un sous-ensemble dénombrable $\{x_i \,|\, i \in I\} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathscr{L}(x_i) = 1$, alors on dit que $\mathscr{L}$ est une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{R}$.*

L'ensemble $\{x_i \,|\, i \in I\}$ est appelé support de la loi $\mathscr{L}$.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est $\mathscr{L}$, alors on dit que X suit la loi $\mathscr{L}$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$.

Exemple : *Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, existe-il une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\alpha}{4^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?*

Terminons ce paragraphe par rappeler le théorème fondamental suivant :

Théorème 10 (la fonction de répartition caractérise la loi). *Si X et Y deux variables aléatoires réelles ayant la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.*

Démonstration. Si $F_X = F_Y$ alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = t_0) = F_X(t_0) - \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) = F_Y(t_0) - \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_Y(t) = \mathbb{P}(Y = t_0).$$

Par conséquent $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et donc X et Y ont même loi. □

4) Transfert d'une variable aléatoire réelle discrète

Proposition/Définition 11. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si g est une application de $X(\Omega)$ à valeurs réelles, alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée transfert de X par g.*

Démonstration.

$\square$

La proposition suivante est à la limite du programme (et elle découle immédiatement de la formule dans la preuve ci-dessus par σ-additivité).

Proposition 12. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. La loi de $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = \{g(x) \,|\, x \in X(\Omega)\}$ et*

$$\forall y \in Y(\Omega), \qquad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in A_y} \mathbb{P}(X = x),$$

où A_y est l'ensemble des antécédents de y par X.

5) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Dans certaines situations (comme la répétition d'une expérience une infinité de fois) nous serons amenés à considérer des variables aléatoire discrètes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Par exemple, si on répète une infinité de fois un lancer de pièce et que l'on note X le premier instant où on tombe sur Face alors X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. L'événement $[X = +\infty]$ correspond alors au fait de tomber que sur Pile à chaque lancer.

On n'étudiera ses variables aléatoire que si elles sont presque sûrement finies, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ ou encore $\mathbb{P}(X = -\infty) = \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

Sans perdre en généralité puisque X est discrète, supposons que $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour montrer que $\mathbb{P}(X < +\infty) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$, on dispose de deux méthodes :

- On peut utiliser le fait que $([X = n])_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ est un système complet d'événements et donc

  ⚠ Il est faux de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = +\infty)$. En effet cette limite est toujours nulle puisque la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)$ converge.

- On peut utiliser la propriété de limite monotone :

Si $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, alors on se ramener au cas de variable aléatoires réelles discrètes en posant plutôt $X = -1$ (par exemple) au lieu de $X = +\infty$.

Exemple : *Si on lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée de façon indépendante, on a vu dans le chapitre précédent que la probabilité d'obtenir Pile à tous les lancers est nulle. Ainsi, si X désigne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir Face pour la première fois, alors $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$. La variable aléatoire X est donc presque sûrement finie. Nous verrons ultérieurement dans ce chapitre qu'elle suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.*

⚠ Par abus de notation, lorsque $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$, on considèrera que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

II Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 13. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si la série* ______ *converge, on dit que X admet une espérance. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel*

______

Remarques :

- On peut unifier les définitions dans le cas fini et le cas infini de la façon suivante : pour rentrer dans le cadre exact du chapitre 21 sur les séries, on peut supposer que $X(\Omega) = \{x_n \,|\, n \in I\}$ et on pose $x_n = 0$ si $n \in \mathbb{N} \backslash I$. Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X)$ est la somme de la série. Si I est fini, on se retrouve avec une somme fini et on retombe sur la notion d'espérance d'une variable aléatoire réelle fini vue au premier semestre (dans ce cas l'espérance existe toujours).
- Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors X admet une espérance si et seulement si la série ______ converge. Dans ce cas, ______
- Si $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ alors X admet une espérance si et seulement si les séries ______ et ______ convergent. Dans ce cas ______

Exemples : *On a vu précédemment qu'il existait une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{3}{4^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Admet-elle une espérance ?*

2) Propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

Proposition 14 (positivité de l'espérance). *Soit X est une variable aléatoire réelle discrète et positive (c'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant une espérance. Alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si X est nulle presque sûrement (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = 0) = 1$).*

Démonstration.

$\square$

Proposition 15 (linéarité de l'espérance (forme faible)). *Soit X est une variable aléatoire réelle réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant une espérance. Si a et b sont deux réels, alors $aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.*

Démonstration.

Nous en déduisons :

Proposition/Définition 16. *Si X est une variable aléatoire réelle réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ admet une espérance nulle. On dit que $X - \mathbb{E}(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à X.*

Le théorème suivant n'est pas clairement au programme cette année mais il est important et il sera vu en seconde année d'ECS de toute façon :

Théorème 17 (linéarité de l'espérance). *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant une espérance. Si a et b sont deux réels, alors $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.*

Terminons ce paragraphe par le théorème de transfert qui permet de calculer l'espérance du transfert d'une variable aléatoire uniquement à l'aide de sa loi.

Théorème 18 (de transfert). *Soit X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série* *converge (c'est notamment le cas lorsque $X(\Omega)$ est fini). Dans ce cas,*

Démonstration. Admis. ☐

Exemples : *Reprenons l'exemple de la variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{3}{4^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

3) Moments d'ordre supérieur

Définition 19. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r \, \mathbb{P}(X = x)$ converge, on dit que X admet un moment d'ordre r. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel*

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \, \mathbb{P}(X = x).$$

Remarques :

- Le moment d'ordre 1 d'une v.a.r.d, s'il existe, est simplement l'espérance de X.
- La variable aléatoire $X^0 = 1$ admet 1 pour espérance donc on peut poser $m_0(X) = 1 = \mathbb{E}(X^0)$.
- D'après le théorème de transfert, si X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, alors $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$. Autrement dit, X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

Proposition 20. *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ alors, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, X admet un moment d'ordre k.*

Démonstration.

$\square$

4) Variance et écart type

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Par conséquent elle admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et donc $(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2$ aussi par linéarité.

Définition 21. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X le réel* $\boxed{}$.

On a encore $\boxed{}$ *d'après la formule de transfert.*

Proposition 22 (formule de Koenig-Huygens). *Soit X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2. Nous avons* $\boxed{}$

Démonstration.

$\square$

Proposition 23. *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. De plus $\mathbb{V}(X) = 0$ si X est une variable aléatoire certaine (i.e il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$).*

Démonstration. Notons $m = \mathbb{E}(X)$. Puisque $(X - m)^2$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance, la propriété de positivité de l'espérance entraîne que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - m)^2) \geqslant 0$. Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $(X - m)^2$ est d'espérance nulle donc $(X - m)^2$ est une variable aléatoire nulle presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = m) = 1$. $\square$

Proposition 24. *Soit X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2. Si a et b sont deux réels, alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.*

Démonstration.

$\square$

Définition 25. *Soit X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*

Remarque : Comme la variance, l'écart type mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance. Plus son écart type est faible, plus la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance est faible.

Proposition/Définition 26. *Si X est une variable aléatoire réelle réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant un moment d'ordre 2, alors $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ admet une espérance nulle et une variance égale à 1. On dit que X^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.