Plan d'étude d'une série

Pour étudier une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ (sa nature puis éventuellement sa somme) on peut suivre la démarche suivante :

I Nature de la série

Rappelons que changer les premiers termes de la série ne modifie pas sa nature (mais sa somme, en cas de convergence, si). On note donc $\sum u_n$ dans la suite.

1. S'il s'agit d'une série usuelle (série de Riemann, série géométrique dérivée, série exponentielle) ou de la somme de séries usuelles, on utilise les résultats du cours.
   Mais attention la somme de deux séries divergentes n'est pas forcément divergente.

2. La série est-telle à termes positifs (du moins à partir d'un certain rang) ? Si oui, alors
   a. On commence par chercher un équivalent simple ($u_n \sim v_n$ avec v_n du type $C\,n^\alpha\,\big(\ln(n)\big)^\beta\,a^n$ avec $(C,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^3$ et $a\in\mathbb{R}^*$).
      - Si $(v_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $(u_n)_n$ non plus et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
        On peut s'aider éventuellement de croissances comparées.
      - Si $\sum v_n$ est une série usuelle convergente (resp. divergente), alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge), d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs.

   b. Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on peut aussi :
      - chercher une majoration : si il existe $\alpha>1$ et $K>0$ tel que $u_n \leqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$ pour n assez grand, alors $\sum u_n$ converge.
      - déterminer $\alpha>1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dans ce cas $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge.
        On peut s'aider éventuellement de croissances comparées.

      On n'oublie pas de mentionner le résultat qu'on applique (par comparaison d'une série à termes positifs avec une série de Riemann convergente, car $\alpha>1$).

   c. Pour montrer que $\sum u_n$ diverge, on peut aussi :
      - chercher une minoration : si il existe $\alpha\leqslant 1$ et $K>0$ tel que $u_n \geqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$ pour n assez grand, alors $\sum u_n$ diverge.
      - déterminer $\alpha\leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dans ce cas $\dfrac{1}{n^\alpha} = o\,(u_n)$ et donc $\sum u_n$ diverge.
        On peut s'aider éventuellement de croissances comparées.

      On n'oublie pas de mentionner le résultat qu'on applique (par comparaison d'une série à termes positifs avec une série de Riemann divergente, car $\alpha\leqslant 1$).

   d. On peut également obtenir une majoration ou une minoration de la suite des sommes partielles associées (à l'aide d'études de fonctions ou encore de comparaison séries/intégrales. Mais celles-ci seront précisées dans l'énoncé).

3. La série est-telle à termes négatifs (du moins à partir d'un certain rang) ? Si oui, alors on considère $\sum(-u_n)$ et on se ramène ainsi à une série à termes positifs.

4. Si les termes de la série ne gardent pas un signe constant, alors celle-ci est-elle absolument convergente ? On étudie $\sum |u_n|$ avec la méthode précédente (c'est une série à termes positifs).

- Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.
- Si $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut rien conclure en général quant à la nature de $\sum u_n$. On se laisse alors guider par l'énoncé.

5. On peut enfin essayer d'écrire u_k sous la forme $x_{k+1} - x_k$, alors on obtient une série télescopique : $\sum(x_{k+1} - x_k)$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_n$ converge.

II Calcul de la somme de la série

1. On peut essayer de se ramener à des sommes usuelles (séries géométriques dérivées, séries exponentielles). *Cf. méthode de l'exercice 1 de la feuille d'exercice n° 20.*
2. Sinon on essaie de calculer les sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geqslant n_0$ (en ayant montré au préalable que la série converge).
   a. Si on écrit u_k sous la forme $x_{k+1} - x_k$, alors on obtient une somme télescopique : $S_n = x_{n+1} - x_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$ puis on fait tendre n vers $+\infty$.
   b. En général on se laisse guider par l'énoncé.