III Sommes doubles

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, alors on dit que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ des éléments de la famille est une somme simple.

1) Notion de somme double

Définition. *On appelle couple d'entiers naturels, la donnée de deux entiers naturels x et y dans cet ordre. On note alors (x,y).*

L'ensemble des couples d'entiers naturels est noté $\mathbb{N}^2$.

Définition. *Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. On appelle famille de nombres réels (resp. complexes) indexée par A la donnée, pour chaque couple d'entiers naturels (i,j) de A, d'un unique nombre réel (resp. complexe) $x_{i,j}$. On la note $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$.*
On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ la somme des éléments de la famille. On dit qu'il s'agit d'une somme double.

Exemple : *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, notons $x_{ij}=3ij^2$.*

2) Le cas d'un domaine rectangulaire

Supposons que $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,|\,m\leqslant i\leqslant n,\ p\leqslant j\leqslant q\}$ avec m, n, p et q des entiers naturels tels que $m\leqslant n$ et $p\leqslant q$. On note alors $(x_{i,j})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	$q-1$	q
m	$x_{m,p}$	$x_{m,p+1}$	$\cdots$	$x_{m,q-1}$	$x_{m,q}$
$m+1$	$x_{m+1,p}$	$x_{m+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{m+1,q-1}$	$x_{m+1,q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_{n-1,p}$	$x_{n-1,p+1}$	$\cdots$	$x_{n-1,q-1}$	$x_{n-1,q}$
n	$x_{n,p}$	$x_{n,p+1}$	$\cdots$	$x_{n,q-1}$	$x_{n,q}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}$ pour tout $i\in[\![m,n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats :
- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}$ pour tout $j\in[\![p,q]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats :

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Soient m, n, p et q des entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$. Soit $(x_{i,j})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ une famille de complexes. Pour tous $i \in [\![m,n]\!]$ et $j \in [\![p,q]\!]$, introduisons les sommes partielles*

$$S_i = \sum_{i=p}^{q} x_{i,j} \qquad \text{et} \qquad T_j = \sum_{i=m}^{n} x_{i,j}.$$

Alors

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} = \boxed{}$$

$$= \boxed{}.$$

Remarques :

- Le nombre de termes intervenant dans cette somme est égal au nombre de termes dans le tableau. Il y en a $(n-m+1)(q-p+1)$ puisqu'il s'agit d'un tableau à $n-m+1$ lignes et $q-p+1$ colonnes. On retrouve ce résultat avec le théorème de Fubini : le nombre de terme est égal à

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} 1 = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} 1\right) = \sum_{i=m}^{n}(q-p+1) = (n-m+1)(q-p+1).$$

- Dans le cas particulier où $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i \leqslant n,\, p \leqslant j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, on note aussi $(x_{i,j})_{p\leqslant i,j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

- (développement/factorisation) Si $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p$ sont des nombres complexes, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j\right) =$$

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, notons $x_{ij} = 3ij^2$.*

3) Le cas d'un domaine triangulaire

a) Somme des termes sur-diagonaux

Supposons que $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On note alors $(x_{i,j})_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

i \ j	p	$p+1$	$\cdots$	$n-1$	n
p	$x_{p,p}$	$x_{p,p+1}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$		$x_{p+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$				$x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$
n					$x_{n,n}$

Comme précédemment, on peut sommer d'abord sur les lignes puis sommer les résultats, ou commencer par les colonnes.

Proposition. *Soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Soit $(x_{i,j})_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. On a alors*

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \boxed{}.$$

Remarques :

- Le nombre de terme intervenant dans cette somme est égale au nombre de termes dans le tableau. Supposons que $p=1$. Il y a alors n termes sur la diagonale et n^2 cases dans le tableau en tout. Le nombre de termes dans le tableau n'étant pas sur la diagonale est donc $\dfrac{n^2-n}{2}$. Il y a donc en tout $n+\dfrac{n^2-n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes dans la somme. On retrouve ce résultat avec la proposition précédente :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 1\right) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- De façon analogue, on peut considérer des domaines triangulaires inférieurs (il suffit d'inverser les rôles de i et j).

b) Somme des termes sur-diagonaux stricts

Supposons que $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,|\, p\leqslant i<j\leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p<n$. On note alors $(x_{i,j})_{p\leqslant i<j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

i \ j	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$n-1$	n
p		$x_{p,p+1}$	$x_{p,p+2}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$			$x_{p+1,p+2}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$p+2$				$\ddots$	$x_{p+2,n-1}$	$x_{p+2,n}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
$n-1$						$x_{n-1,n}$
n						

Comme précédemment, on peut sommer d'abord sur les lignes puis sommer les résultats, ou commencer par les colonnes.

Proposition. *Soient p et n des entiers naturels tels que $p < n$. Soit $(x_{i,j})_{p \leqslant i < j \leqslant n}$. On a alors*

$$\sum_{p \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j} = \boxed{} .$$

Remarques :

- Le nombre de terme intervenant dans cette somme est égale au nombre de termes dans le tableau. Supposons que $p = 1$. Il y a alors n termes sur la diagonale et n^2 cases dans le tableau en tout. Le nombre de termes dans le tableau n'étant pas sur la diagonale est donc $\dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On retrouve ce résultat avec la proposition précédente :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1 = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- (développement du carré d'une somme) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =$$

- De façon analogue, on peut considérer des domaines triangulaires inférieurs stricts (il suffit d'inverser les rôles de i et j).

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Calculons $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$ de deux manières.*