Chapitre 2

Ensembles de nombres, calculs algébriques et inégalités

I Les ensembles de nombres

1) Existence admise des ensembles de nombres

Nous admettons l'existence et les principales propriétés des ensembles de nombres suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels.
- L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers relatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Nous avons les inclusions strictes[1] suivantes : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

Ces ensembles contiennent 0 et on note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Nous introduisons aussi :

- Pour deux entiers relatifs p et n tels que $p \leqslant n$, l'ensemble $[\![p, n]\!] = \{p, p+1, \dots, n-1, n\}$ des entiers compris entre p et n.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux (les rationnels admettant un développement décimal limité[2], c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini de chiffres après la virgule en base 10).
- L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des nombres irrationnels (les réels n'étant pas rationnels).
- L'ensemble $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) des réels positifs (resp. négatif). On a $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} \end{array}\right.$.
- L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) des réels strictement positifs (resp. strictement négatifs).

2) Opérations dans $\mathbb{R}$

a) Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$

Les deux propositions suivantes sont admises :

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération[3], appelée addition, notée $+$, et qui vérifie :*

- *Pour tous réels x et y, $x + y = y + x$ (commutativité).*
- *Pour tous réels x, y et z, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).*
- *Pour tout réel x, $0 + x = x + 0 = x$ (0 est l'élément neutre pour l'addition).*
- *Tout réel x admet un opposé, noté $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

Pour tous réels x et y, on note $x - y = x + (-y)$ la soustraction de x par y.

1. On dit que l'ensemble E est strictement inclus dans l'ensemble F, si $E \subset F$ et $E \neq F$. On note alors $E \subsetneq F$.
2. C'est-à-dire les éléments $x \in \mathbb{Q}$ tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x).
3. Définir une opération sur un ensemble E consiste à associer à toute paire d'éléments de E un autre élément de E. Par exemple l'addition (resp. la multiplication) sur $\mathbb{R}$ associe à deux réels x et y leur somme (resp. leur produit), notée $x + y$ (noté $x \cdot y$).

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération appelée multiplication, notée $\cdot$ (ou $\times$), et qui vérifie :*

- *Pour tous réels x et y, $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité).*
- *Pour tous réels x, y et z, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativité).*
- *Pour tout réel x, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication).*
- *Tout réel x non nul admet un inverse, noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*
- *Pour tout réels x, y et z, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ($\cdot$ est distributive par rapport à $+$).*

Pour tous réels x et y, on note plutôt xy au lieu de $x \cdot y$. Si $y \neq 0$, on note $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ la division de x par y.

Remarques :

- Les propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés énoncées ci-dessus :
  - — Pour tous réels x et y, $xy = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.

    En effet, si $z \in \mathbb{R}$, alors $0z = (0+0)z = 0z + 0z$ et donc $0 = 0z - 0z = 0z$. Réciproquement si x et y sont deux réels tels que $xy = 0$, alors ou bien $x = 0$, ou bien $x \neq 0$ et alors $y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$.
  - — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-1)x = -x$.

    En effet, $0 = x0 = x(1 + (-1)) = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ donc $-x = (-1)x$.
  - — Soient x, y et z réels. Nous avons :
    - ⋆ $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$,
    - ⋆ Si $x + y = x + z$, alors $y = z$.
    - ⋆ Si $x \neq 0$ et $xy = xz$, alors $y = z$.
  - — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.
- Stabilité des ensembles de nombres :
  - — L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{N}$, $x + y \in \mathbb{N}$ et $xy \in \mathbb{N}$. Par contre $\mathbb{N}$ n'est pas stable par la soustraction et $\mathbb{N}^*$ n'est pas stable par l'inversion.

    Par exemple $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$ et $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. On a même $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
  - — L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{Z}$, $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $xy \in \mathbb{Z}$. Par contre $\mathbb{Z}^*$ n'est pas stable par l'inversion.
  - — L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^*$ est également stable par inversion, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$.

b) Le cas des rationnels

La notation sous forme de fraction de l'inverse d'un réel non nul nous permet d'écrire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Si $q = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on dit que a est le numérateur de q et b le dénominateur de q. L'écriture d'un rationnel n'est pas unique : si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, alors

$$\forall c \in \mathbb{Z}^*, \qquad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ n'admettent pas de diviseur commun autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$, alors on dit que le rationnel $\dfrac{a}{b}$ est écrit sous forme irréductible.

Proposition (opérations dans $\mathbb{Q}$). *Soient a, c des entiers et b, d des entiers non nuls. Nous avons*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\boxed{},\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\boxed{},\qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\boxed{}\qquad \text{et}\qquad \left(\frac{b}{d}\right)^{-1}=\boxed{}.$$

c) Congruences sur $\mathbb{R}$

La notion de congruence est fondamentale en arithmétique des entiers (mais cette dernière n'est pas au programme d'ECS). Elle est aussi très utile en trigonométrie (cf. chapitre *Nombres complexes et trigonométrie*).

Définition. *Soient a, b et m des réels. On dit que a est congru à b modulo m si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b\,[m]$ ou $a \equiv b \pmod m$.*

Exemples :

- $\dfrac{10\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$ *puisque* $\dfrac{10\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9\pi}{3} = 3\pi$.
- $100 \equiv 4\,[6]$ *puisque* $100 - 4 = 96 = 16 \times 6$.

Proposition. *Soient a, b, c, d et m des réels.*

1. *Nous avons* $\boxed{}$. *(réflexivité)*
2. *Nous avons $a \equiv b\,[m]$ si et seulement si* $\boxed{}$. *(symétrie)*
3. *Si $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$, alors* $\boxed{}$. *(transitivité)*
4. *Si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$, alors* $\boxed{}$.
5. *Si $a \equiv b\,[m]$, alors* $\boxed{}$.
6. *Si $c \neq 0$ et $a \equiv b\,[m]$, alors* $\boxed{}$.
7. *Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \equiv b\,[km]$, alors* $\boxed{}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$, alors on a pas forcément $ac \equiv bd\,[m]$.

Par exemple on a $\dfrac{4\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$ *et* $\dfrac{3\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$. *Par contre* $\dfrac{4\pi}{3} \times \dfrac{3\pi}{2} = 2\pi$ *n'est pas congru à* $\dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ *modulo π.*

d) Puissances entières

Définition (puissance entière). *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ et note x^n, le réel $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$. On pose $x^0 = 1$.*

Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on définit $x^n = \underbrace{x^{-1} \times x^{-1} \times \cdots \times x^{-1}}_{-n \text{ termes}}$.

Remarques :

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x^1 = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n$ (valable aussi si $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$. $\rightsquigarrow$ Exercice.
- Nous avons $0^0 = 1$.

- Si $x \neq 0$ alors, pour passer de x^3 à x^2 on divise par x, puis pour passer de x^2 à x^1 on divise encore par x, donc pour passer de x^1 à x^0, il est naturel de vouloir diviser par x et on obtient alors $x^0 = 1$. Par conséquent la convention $x^0 = 1$ est naturelle.

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$*

Remarque : En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors $(-1)^n = \dfrac{1}{(-1)^n}$ et $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$.

Proposition. *Soient n et p deux entiers et x et y deux réels non nuls. Nous avons :*

- $x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$,
- $(xy)^n = x^n y^n$,
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$,
- $x^{n+p} = x^n x^p$,
- $x^{n-p} = \dfrac{x^n}{x^p}$,
- $(x^n)^p = x^{np}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition (identité remarquables). *Soient x et y deux réels. Nous avons*

- $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$,
- $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$,
- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$,

3) Opérations dans $\mathbb{C}$

Rappelons qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est la donnée d'un unique couple de réels (x, y) présenté sous la forme $z = x + iy$, appelée forme algébrique ou cartésienne de z. Le réel x est appelé partie réelle de z, et noté $\mathfrak{Re}(z)$. Le réel y est appelé partie imaginaire de z, et noté $\mathfrak{Im}(z)$.

On identifie le réel x au complexe $x + i0$ (ce qui permet de voir $\mathbb{R}$ comme un sous ensemble de $\mathbb{C}$). On note simplement i le complexe $0 + i \cdot 1$.

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$: si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont des nombres complexes avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{C}^4$, alors on définit

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \qquad \text{et} \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

En particulier $i^2 = -1$. Toutes les propriétés de l'addition et de la multiplication énumérées dans le paragraphe I.2 sont toujours valables sur $\mathbb{C}$ (elles découlent des propriétés de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$). Ajoutons la proposition suivante :

Proposition. *Si x et y sont deux réels, alors $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$.*

Nous reverrons tout cela plus en détail lors du chapitre *Nombres complexes et trigonométrie*.

4) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

a) Définitions et propriétés

Définition. *Soient x et y deux réels. On dit que*

- *x est inférieur à y, et on note $x \leqslant y$, si $x - y \in \mathbb{R}_-$.*
- *x est strictement inférieur à y, et on note $x < y$, si $x - y \in \mathbb{R}_-^*$.*
- *x est supérieur à y, et on note $x \geqslant y$, si $x - y \in \mathbb{R}_+$.*
- *x est strictement supérieur à y, et on note $x > y$, si $y - x \in \mathbb{R}_+^*$.*

La proposition suivante est admise (elle découle de la construction de $\mathbb{R}$ qui est hors-programme).

Proposition.

1. ***La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre totale :***
   - *Pour tout réel a, $a \leqslant a$ (réflexivité).*
   - *Si a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$ (antisymétrie).*
   - *Si a, b et c sont des réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ (transitivité).*
   - *Pour tous réels a et b, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (ordre total).*
2. ***Compatibilité avec l'addition :*** *Soient a, b et c des réels. Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.*
3. ***Compatibilité avec la multiplication :***
   Soient a, b et c des réels. Si $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$, alors $ac \leqslant bc$.

On en déduit les règles suivantes :

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \boxed{} b + d$.*
  En particulier la somme de deux nombres positifs (resp. négatifs) est positive (resp. négative).
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \boxed{} bc$.*
  En particulier $a \leqslant b$ si et seulement si $-a \boxed{} -b$.
- *On a $ab \geqslant 0$ (resp. $ab \leqslant 0$) si et seulement si $\boxed{}$*
  (resp. $\boxed{}$).
- *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \boxed{} bd$.*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $\frac{1}{a} \boxed{} \frac{1}{b}$.*

Soustraire, multiplier ou diviser des inégalités membre à membre n'est pas permis

Par exemple, pour $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$ et $d = 2$, on a $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors que $a - c = 3 \geqslant -1 = b - d$, $ac = 4 \geqslant 2 = bd$ et $\frac{c}{a} = 4 \geqslant 2 = \frac{d}{b}$.

Par contre on peut additionner des inégalités membre à membre (si elles sont dans le même sens bien sûr) et on peut aussi les multiplier dans le cas où tous les termes sont positifs.

On en déduit aussi les règles suivantes concernant les inégalités strictes :

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $(a < b$ et $b \leqslant c)$ ou $(a \leqslant b$ et $b < c)$, alors $a \boxed{} c$.*
- *Si $a < b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \boxed{} b + d$.*
- *Si $a < b$ et $0 < c$ (resp. $c < 0$), alors $ac \boxed{} bc$ (resp. $ac \boxed{} bc$).*
  En particulier, $a < b$ si et seulement si $-a \boxed{} -b$.
- *$ab > 0$ si et seulement si $\boxed{}$.*
- *$ab < 0$ si et seulement si $\boxed{}$.*
- *$a > 0$ (resp. $a < 0$) si et seulement si $\frac{1}{a} \boxed{} 0$ (resp. $\frac{1}{a} \boxed{} 0$).*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a < b$ si et seulement si $\frac{1}{a} \boxed{} \frac{1}{b}$.*

Par récurrence, on montre que :

Proposition. *Soient x et y deux réels.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
  - *Si n est pair et $0 \leqslant x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est pair et $x < y \leqslant 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.*
  - *Si n est pair et $0 < x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est pair et $x < y < 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $0 < x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $x < y < 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Élever à une puissance entière les termes d'une inégalité n'est pas permis s'ils sont de signe contraire (à part si la puissance en question est un entier naturel impair).

Par exemple, on a $-3 < 5$ et $(-3)^2 < 5^2$ mais $-4 < 2$ et $(-4)^2 > 2^2$.

b) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition. *Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, nous notons*

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ *(intervalle fermé borné ou segment),*

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle ouvert borné),*

$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ *(intervalle ouvert et fermé non borné).*

Les réels a et b sont appelés les extrémités de l'intervalle.

Remarques :

- Pour tout réel a, l'intervalle $[a,a]$ est le singleton $\{a\}$.
- On parle aussi d'intervalle semi-fermé pour un intervalle semi-ouvert.
- Pour tout réel a, les intervalle semi-ouverts $]a,a]$, $[a,a[$ et $]a,a[$ sont vides.
- Si $a > b$, alors l'intervalle $[a,b]$ (resp. $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$) désigne souvent, par abus de notation, l'intervalle $[b,a]$ (resp. $]b,a]$, $[b,a[$ et $]b,a[$). Mais attention, certains ouvrages prennent la convention que ces intervalles sont vides.

Théorème 17 (Caractérisation des intervalles). *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels x et y de I tels que $x \leqslant y$, le segment $[x,y]$ est inclus dans I.*

Démonstration. Admis. $\square$

Autrement dit, un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ caractérisée par le fait que, quelque soient les éléments x et y de I, tout nombre réel compris entre x et y est encore dans I.

c) Valeur absolue d'un réel

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue $|x|$ de x par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples : $|-3| = 3$, $|-\pi| = \pi$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

Remarque : Pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$, $\big||x|\big| = |x|$, $x^2 = |x|^2$, $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$. De plus $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Proposition. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons*

$$\begin{array}{lllll} |x| \leqslant a & \iff & \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \iff & x \in \boxed{\qquad\qquad\qquad}, \\ |x| < a & \iff & \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \iff & x \in \boxed{\qquad\qquad\qquad}, \\ |x| \geqslant a & \iff & \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \iff & x \in \boxed{\qquad\qquad\qquad}, \\ |x| > a & \iff & \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \iff & x \in \boxed{\qquad\qquad\qquad}. \end{array}$$

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

- $|xy| = |x| \cdot |y|$,
- *Si $y \neq 0$, alors* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- *Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors* $|x^n| = |x|^n$.

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

$$x^2 = y^2 \iff \boxed{\qquad\quad} \iff \boxed{\qquad\qquad\qquad}.$$

De plus $x^2 \leqslant y^2$ si et seulement si $\boxed{\qquad\quad}$.

Proposition (inégalité triangulaire). *Pour tous réels x et y, on a $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Corollaire. *Pour tous réels x et y, on a $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Remarque : Cette dernière inégalité est aussi appelée inégalité triangulaire (renversée).

d) Partie entière d'un réel

Proposition/Définition (partie entière d'un réel). *Pour tout réel x, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelée la partie entière de x et notée $\lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- *Unicité.*

- *Existence.* Nous montrerons l'existence dans le chapitre *Convergence de suites réelles.* □

Exemples : $\lfloor 17,42 \rfloor = 17$, $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$, $\lfloor 7/3 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$.

5) Racine d'un réel positif

Lemme. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Nous avons $x^n = 1$ si et seulement si $x = 1$.*

Démonstration. Supposons que $x^n = 1$. Si $n = 1$, alors $x = 1$. Supposons donc que $n \geqslant 2$. On a $x \neq 0$ (puisque $0^n = 0 \neq 1$) donc $x^{n-1} \neq 0$ et donc $x = \dfrac{1}{x^{n-1}}$.

- Si $x \leqslant 1$, alors $x^{n-1} \leqslant 1$ et donc $x = \dfrac{1}{x^{n-1}} \geqslant 1$. Par conséquent $x = 1$.
- Si $x \geqslant 1$, alors $x^{n-1} \geqslant 1$ et donc $x = \dfrac{1}{x^{n-1}} \leqslant 1$. Par conséquent $x = 1$.

Nous en déduisons que $x = 1$. Réciproquement, si $x = 1$, alors $x^n = 1$. □

Proposition/Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Pour tout réel positif x, il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de x et noté $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$.*

Démonstration. On a déjà vu que 0 est l'unique racine de 0. Soit $x > 0$.

Unicité. Soient y et z sont deux réels tels que $y^n = x = z^n$. Puisque $z \neq 0$ (sinon $x = z^n = 0$), on a $1 = \dfrac{y^n}{z^n} = \left(\dfrac{y}{z}\right)^n$. Par conséquent, d'après le lemme précédent, $\dfrac{y}{z} = 1$ et donc $y = z$. D'où l'unicité.

Existence. Nous montrerons l'existence dans le chapitre suivant. □

Remarques :

- Si $n = 2$ et x est un réel positif, alors on note simplement $\sqrt{x}$ la racine carrée de x.
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.
- Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  - Si x est un réel positif, alors $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
  - Si x est un réel quelconque et si n est pair, alors $x^n \geqslant 0$ et $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Proposition. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Soit p un entier relatif. Nous avons :*

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \text{et} \qquad (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}.$$

Démonstration. D'après la proposition, nous avons $xy = (\sqrt[n]{x})^n(\sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y})^n$. Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel strictement positif xy, nous obtenons que $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$. De même, nous obtenons que $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$. Enfin

$$\left((\sqrt[n]{x})^p\right)^n = (\sqrt[n]{x})^{pn} = (\sqrt[n]{x})^{np} = \left((\sqrt[n]{x})^n\right)^p = x^p = (\sqrt[n]{x^p})^n.$$

Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel strictement positif x^p, nous obtenons que $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$. □