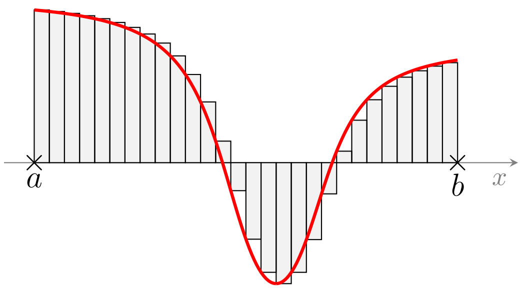
IV Sommes de Riemann à pas constant

3) Méthode des rectangles : interprétation géométrique en terme d'aire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec a et b deux réels tels que $a<b$. Fixons $n\in\mathbb{N}^*$ et notons

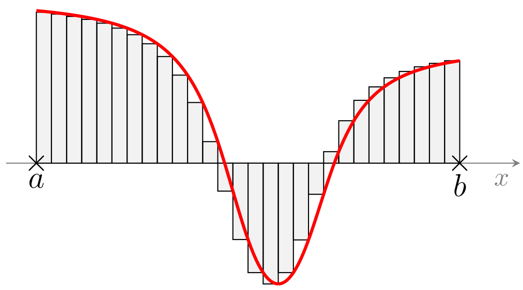
$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),\qquad T_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

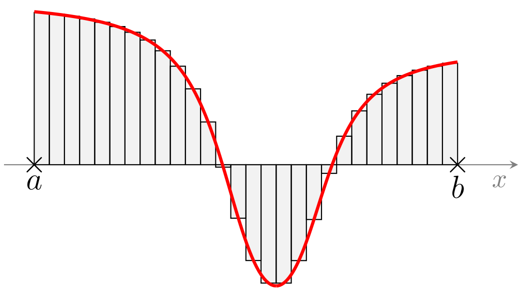
$$M_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$



Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+k\dfrac{b-a}{n},a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $S_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+(k-1)\dfrac{b-a}{n},a+k\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $T_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.





Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n}f\left(a+\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+k\dfrac{b-a}{n},a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $M_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.

La convergence des sommes $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$ vers $\int_a^b f(t)\,dt$ permet d'interpréter l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ comme l'aire algébrique de la surface délimitée par sa courbe représentative, par l'axe des abscisses et pas les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Ces convergences fournissent également une méthode numérique permettant d'approcher des intégrales par des sommes. Cette méthode d'approximation est appelée la méthode des rectangles (à gauche si l'on considère $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, à droite si l'on considère $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$, au milieu si l'on considère $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$). Nous la mettrons en œuvre cette année en TP avec le logiciel `Scilab`.