II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

4) Extension au cas des fonctions continues par morceaux

La relation de Chasles entraîne que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est la somme des intégrales de f sur $[a,c]$ et $[c,b]$, quelque soit le réel c. On peut donc suivre une subdivision pour calculer une intégrale. Cela est à la base de la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 1. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Considérons $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1},a_i[}$ à $[a_{i-1},a_i]$. Le réel*

$$I(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt$$

ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée σ.

Démonstration. Considérons deux subdivisions $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ et $\sigma=(b_0,\dots,b_m)$ adaptées à f. Supposons par exemple que $n<m$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1},a_i[}$ à $[a_{i-1},a_i]$. Pour tout $j\in[\![1,m]\!]$, notons $\tilde{f}_j$ le prolongement par continuité de $f\big|_{]b_{j-1},b_j[}$ à $[b_{j-1},b_j]$.

Notons $k_0=0$ et, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons k_i le nombre de b_j tels que $b_j\in\,]a_{i-1},a_i]$. On peut ainsi ranger par ordre croissant :

$$\begin{aligned}a=a_0=b_0<b_1<\dots<b_{k_1}\leqslant a_1<b_{k_1+1}<\dots<b_{k_1+k_2}\leqslant a_2<\dots\\ \dots<b_{k_1+\dots+k_{n-1}}\leqslant a_{n-1}<\dots<b_{k_1+\dots+k_{n-1}+1}<\dots<b_{k_1+\dots+k_n}=b_m=a_n=b.\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\qquad \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt=\sum_{j=k_0+\dots+k_{i-1}}^{k_0+\dots+k_i}\int_{b_{j-1}}^{b_j} f_i(t)\,dt.$$

Or pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$, $f_i=\tilde{f}_j$ sur $[b_{j-1},b_j]$. Ainsi

$$I(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k_0+\dots+k_{i-1}}^{k_0+\dots+k_i}\int_{b_{j-1}}^{b_j}\tilde{f}_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^{m}\int_{b_{j-1}}^{b_j}\tilde{f}_j(t)\,dt=I(f,\sigma').$$

Nous en déduisons que la définition ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f. □

Définition. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par*

$$\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt,$$

où $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ est une subdivision quelconque adaptée à f et, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, f_i désigne le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1},a_i[}$ à $[a_{i-1},a_i]$.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I. Soient $(a,b,c) \in I^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons*

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$
2. $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*

Supposons que a et b sont deux réels tels que $a<b$.

4. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$
5. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$
6. $\displaystyle(b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f.$
7. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]}|f|.$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

La propriété de stricte positivité n'est plus valable pour l'intégrale de fonctions continues par morceaux. Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$ pour laquelle $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Pourtant il ne s'agit pas de l'application nulle sur $[0,1]$.

Proposition. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ qui ne diffèrent que d'un nombre fini de points. Alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$

Démonstration. La fonction $h = f - g$ est nulle sur $[a,b]$ sauf un nombre fini de points. Considérons $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adapté à h. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, $h(x) = 0$ donc h_i le prolongement par continuité de $h\big|_{]a_{i-1},a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$ est la fonction constante égale à 0 et donc son intégrale de a_{i-1} et a_i est nulle. Par conséquent

$$\int_a^b (f(t) - g(t))\,dt = \int_a^b h(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} h_i(t)\,dt = 0.$$

Par linéarité, nous en déduisons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$ $\square$