Chapitre 13

Dérivation d'une fonction réelle à valeurs réelles

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité en un point

1) Fonction dérivable en un point

Définition 1 (dérivée en un point). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 lorsque la fonction*

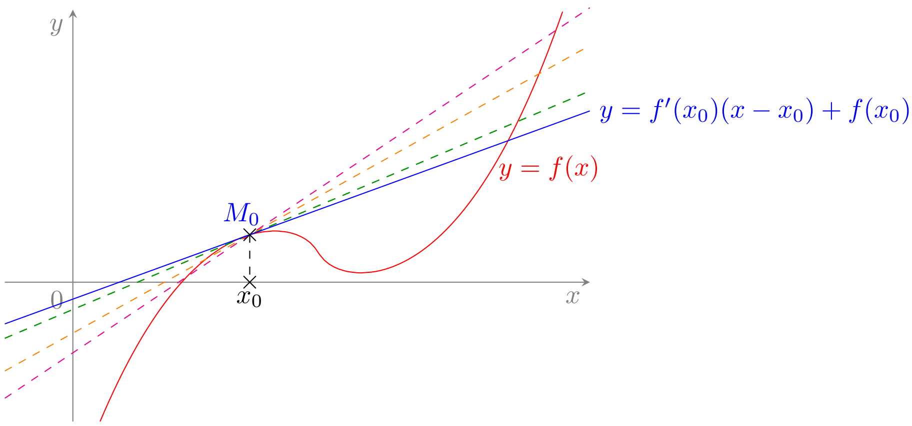
$$x \in I\backslash\{x_0\} \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(appelée taux d'accroissement en x_0*) admet une limite finie en x_0. Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.*

Remarque : La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $h \longmapsto \frac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)$ admet une limite finie en 0. Dans ce cas,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Interprétation géométrique : Soit $x_0 \in I$. Notons $M_0(x_0, f(x_0))$ le point de la courbe d'abscisse x_0. Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe différent du point M_0. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la pente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ de la droite M_0M admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, la droite passant par M_0 de pente $f'(x_0)$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M_0. Cette droite a pour équation $x = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est tangente à la courbe en x_0.

Exemples :

Proposition 2. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.*

Démonstration.

□

⚠ La continuité en x_0 est une condition nécessaire à la dérivabilité en x_0. Mais ce n'est pas une condition suffisante : la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition/Définition 3 (développement limité à l'ordre 1). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lambda$.*
2. *Il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en x_0 et telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. Si $x \neq x_0$, nous avons $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda + \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \lambda$. Il s'ensuit que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \lambda$.

Réciproquement, si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = \lambda$, alors la fonction ci-dessous convient

$$\varepsilon : x \in I \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = x_0, \\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si} \quad x \neq x_0. \end{cases}$$

□

2) Dérivée à droite et à gauche

Définition 4 (dérivée à droite et à gauche). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 lorsque la fonction*

$$x \in I \backslash \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(appelée taux d'accroissement en x_0*) admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en x_0. Cette limite est appelée dérivée de f à droite (resp. à gauche) en x_0 et notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).*

Exemple :

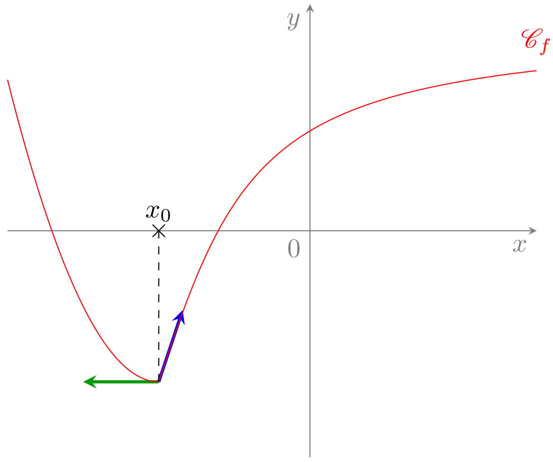
Remarques :

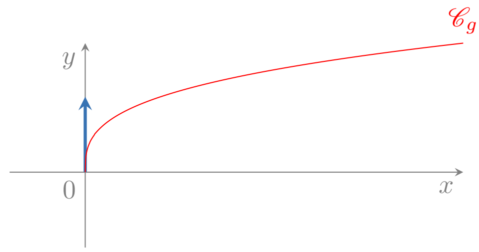
- Si $x_0 \in I$ est l'éventuelle extrémité droite (resp. gauche) de I, la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0, n'a pas de sens.
- Si $x_0 \in I$ n'est pas l'éventuelle extrémité droite (resp. gauche) de I, alors f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si $h \longmapsto \frac{1}{h}\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big)$ admet une limite finie en 0^+ (resp. en 0^-). Dans ce cas,

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\text{resp.} \quad f'_g(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right).$$

Interprétation géométrique : On peut définir à l'aide des dérivées à droite et à gauche la notion de demi-tangente : si f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite. Si les limites à gauche ou à droite en x_0 sont infinies, alors on parle de demi-tangente verticale en x_0. Par exemple, la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale (à droite) au point 0.

Dans l'exemple en-dessous à gauche, $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale à gauche en x_0 (tracée en vert) et une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(x_0) > 0$ à droite en x_0 (tracée en bleu). L'exemple de droite est celui de la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \sqrt[3]{x}$ qui possède une demi-tangente verticale (à droite) en 0 (tracée en bleu clair).





Proposition 5. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ n'étant pas une (éventuelle) extrémité de I. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Démonstration. Cette proposition découle de la proposition analogue sur les limites à gauches et à droite. □

3) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Théorème 6. *Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soient $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors*

1. *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*
2. *λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*
3. *fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors

4. *$\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.*
5. *$\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.*

Démonstration.

□

Proposition 7. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in I$. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions à valeurs réelles définies sur I et dérivables en x_0. Alors la fonction $f_1 \cdots f_n$ est dérivable en x_0 et*

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) f_k'(x_0) f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0).$$

En particulier, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, alors la fonction f^n est dérivable en x_0 et $(f^n)'(x_0) = n f'(x_0)(f(x_0))^{n-1}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Théorème 8. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$.*

Démonstration.

□

Théorème 9. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. De plus, si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Formulation alternative : *Si $y_0 \in J$ et si f est dérivable en $f^{-1}(y_0)$ avec $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

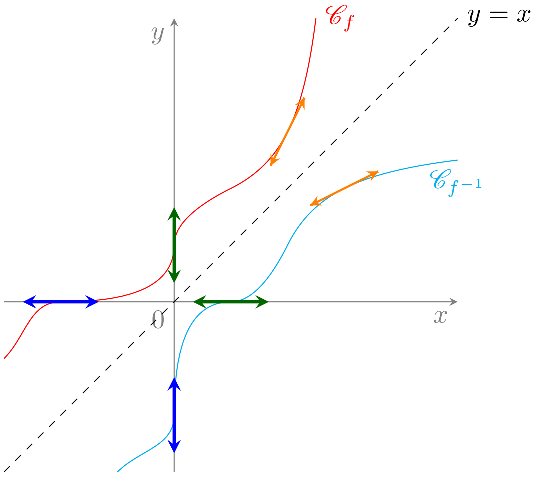
Démonstration.

Remarques :

- Sachant que f^{-1} est alors dérivable en $f(x_0)$, on peut retrouver la formule de la dérivée à l'aide de la proposition 8. En effet nous avons, pour tout $x \in I$, $f \circ f^{-1}(x) = x$. Par conséquent $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$ et donc $f'(x_0)(f^{-1})'(f(x_0)) = 1$.

- Si f est dérivable et strictement monotone sur I et si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$ (car sinon la remarque précédente entraine que $0 = f'(x_0) \times (f^{-1})'(f(x_0)) = 1$, ce qui est est absurde). Plus précisément, en reprenant la démonstration du théorème, on obtient $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} \underset{y \to f(x_0)}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$) si f est strictement croissante (resp. si f est strictement décroissante).

Interprétation géométrique : Si f est dérivable et strictement monotone, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x_0 \in I$ et la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en $f(x_0)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. En particulier si $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale (resp. verticale) en x_0, alors $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet une demi-tangente verticale (resp. horizontale en $f(x_0)$.



II Fonctions dérivées

1) Définitions

Définition 10. *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f, et on note f', la fonction qui à $x \in I$ associe $f'(x)$, la dérivée de f en x.*

On note $D^1(I, \mathbb{R})$ ou $D^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Définition 11. *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si elle est dérivable sur I et si la fonction f' est continue sur I.*

On note $C^1(I, \mathbb{R})$ ou $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I.

Remarque : On a $C^1(I, \mathbb{R}) \subsetneq D^1(I, \mathbb{R}) \subsetneq C^0(I, \mathbb{R})$.

Pour le moment nous nous limiterons aux dérivées premières. Donnons tout de même la définition des dérivées successives d'une fonction (nous y reviendrons en détail au second semestre).

Définition 12. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelé la dérivée seconde de f. On la note $f^{(2)}$ ou f''.*

On définit les dérivées successives par récurrence : pour un entier $n \geqslant 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si

- *f est $n-1$ dérivable sur I,*
- *$f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f, est dérivable sur I.*

La fonction $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou dérivée d'ordre n) de f et notée $f^{(n)}$.

On a $f^{(1)} = f'$ et on pose $f^{(0)} = f$.

Définition 13. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.*

On note $C^k(I, \mathbb{R})$ ou $C^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

Définition 14. *On dit que f est de classe C^∞ sur I si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k sur I, autrement dit si f est infiniment dérivable sur I.*

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

La plupart des fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, etc.) sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

2) Opérations sur les fonctions dérivables sur I

Les résultats suivants découlent des théorèmes de la section I.3.

Théorème 15. *Soient f et g dans $D^1(I, \mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1. *$f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.*
2. *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
3. *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
4. *f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'fn - 1$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors

4. *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.*
5. *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Théorème 16. *Soient $f \in D^1(I, \mathbb{R})$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $g \in D^1(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.*

Théorème 17. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

3) Dérivées usuelles

Nous renvoyons au formulaire sur les dérivées usuelles pour un tableau récapitulatif.

a) Dérivabilité des fonctions puissances d'un nombre entier

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Considérons la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$.

- Si $n = 0$, alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_0 = 0$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = nx^{n-1}$.
- Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

b) Dérivabilité des fonctions racine $n^{\text{ième}}$

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. La fonction $g_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'_n(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.