IV Asymptotes et branches paraboliques

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Définition 45 (asymptotes).

- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash I$ une extrémité de I. Si f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en x_0. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en x_0.*
- *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si I n'est pas majorée (resp. minorée) et si*

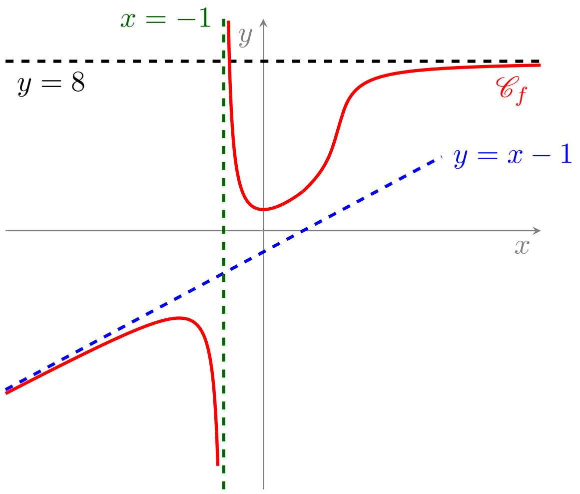
$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \qquad \left(\textit{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0\right),$$

  on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
  - *Si $a \neq 0$, on parle d'asymptote oblique.*
  - *Si $a = 0$, on parle d'asymptote horizontale. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).*

Remarques :

- Dans le deuxième cas, on peut également être amené à étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de $f(x) - ax - b$ selon le cas. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus, sinon elle est en-dessous.
- La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$



Dans l'exemple ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet :

- *la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique en $-\infty$,*
- *la droite d'équation $y = 8$ pour asymptote horizontale en $+\infty$,*
- *la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote verticale en -1.*

L'étude branche parabolique est à la limite du programme. Elles sont utiles pour le tracé de courbes représentatives de fonctions.

Définition 46 (branches paraboliques). *Supposons que I n'est pas majorée et que f admette $\pm\infty$ pour limite en $+\infty$.*

- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique (de direction) verticale en $+\infty$.*
- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique (de direction) horizontale en $+\infty$.*
- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = +\infty$ ou $-\infty$, alors on on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique en $+\infty$ de direction parallèle à la droite d'équation $y = ax$.*

V Continuité en un point et limites de fonctions usuelles

Théorème 47. *1. La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.*
4. *Les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.*
5. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues en tout réel. La fonction $\tan$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.*
6. *La fonction $\exp$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
7. *La fonction $\ln$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.*

Théorème 48. *1. $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.*

2. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$*
3. *Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = 0$.*
4. *Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$*
5. *Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.*
6. *Si P est une fonction polynomiale de degré p et de coefficient dominant a_p, alors elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto a_p x^p$.*
7. *Si P est une fonction polynomiale de degré p et de coefficient dominant a_p, si Q est une fonction polynomiale de degré q et de coefficient dominant b_q, alors la fonction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q}$.*
8. *Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.*
9. *Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.*

Rappelons aussi quelques limites utilisant le taux d'accroissement et les croissances comparées (que nous montrerons dans le chapitre *Dérivation*) :

Proposition 49. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Théorème 50 (croissances comparées pour les fonctions).

1. *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \,]0,+\infty[^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.*
2. *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \,]0,+\infty[^2$, $\lim\limits_{x\to0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$.*
3. *Pour tous $a \in \,]1,+\infty[$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\gamma}{a^x} = 0$.*
4. *Pour tous $a \in \,]1,+\infty[$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x\,|x|^\gamma = 0$.*

En utilisant le théorème 27 (avec $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), nous obtenons :

Théorème 51 (croissances comparées pour les suites).

1. *Pour tout $(\alpha,\beta) \in \,]0,+\infty[^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta} = 0$.*
2. *Pour tous $q \in \,]1,+\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$.*