

Chapitre 11

Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction réelle de la variable réelle. Notons D_f son domaine de définition. Soit $I \subset D_f$ un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, c'est-à-dire

- ou bien il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que $I =]a, b[, [a, b[,]a, b]$ ou $[a, b]$,
- ou bien il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I =]-\infty, a[,]-\infty, a],]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$,
- ou bien $I = \mathbb{R}$.

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite numérique achevée

I Limite et continuité en un point

1) Notion de voisinage

Définition 1 (voisinage).

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de x_0 tout intervalle V ouvert¹ contenant x_0 .
- On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle du type $V =]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle du type $V =]-\infty, A[$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Remarque : Souvent on prend pour voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, un intervalle ouvert centré en x_0 , c'est-à-dire du type $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$. On peut toujours s'y ramener quitte à réduire l'amplitude du voisinage considéré.

Définition 2. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une propriété P (portant sur les réels) est vraie au voisinage de x_0 si il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $P(x)$ est vraie. Ces propriétés sont appelées propriétés locales.

2) Limite finie en un point


a) Définition

Définition 3. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une éventuelle extrémité finie de I . On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon),$$

i.e. pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Remarques :

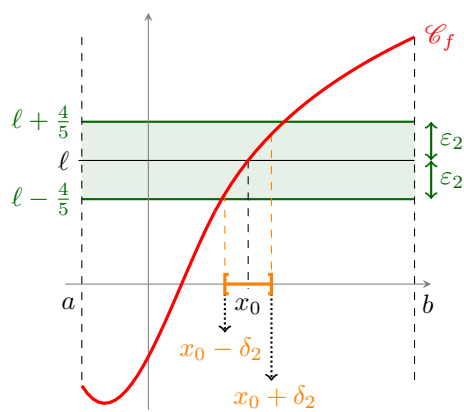
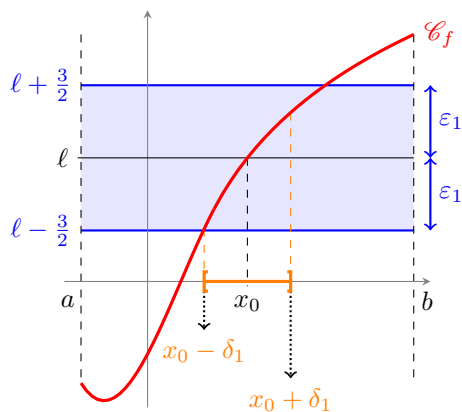
- On dit aussi que $f(x)$ tend (ou converge) vers ℓ quand x tend vers x_0 ou que f tend (ou converge) vers ℓ en x_0 .
-  Le réel δ dans la définition dépend de x_0 et de ε .
- Cette définition signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ (c'est-à-dire à distance ε de ℓ , pour tout ε) dès que x est suffisamment proche de x_0 (à distance δ de x_0 , pour un δ dépendant du choix de ε).

La notion de limite en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'étend au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$:

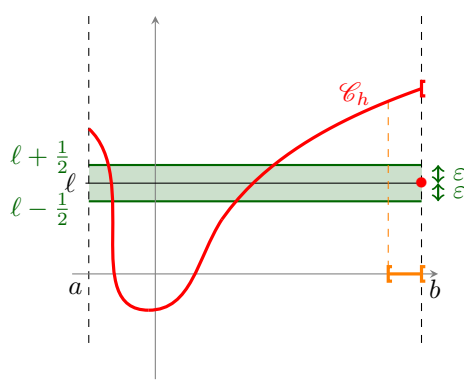
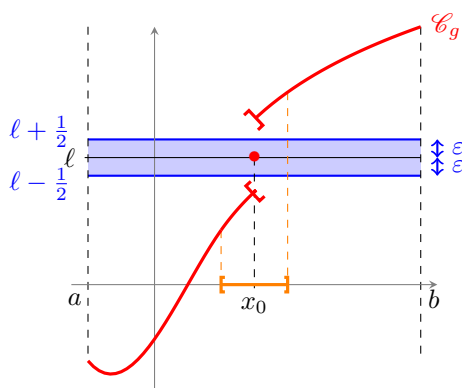
Définition 4. Soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap ([x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

1. c'est-à-dire du type $]a, b[, [a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.



Ci-dessus f est définie sur $I = [a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. La fonction f admet l pour limite en $x_0 \in I$. A gauche, nous avons choisi $\varepsilon_1 = 3/2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1, \ell + \varepsilon_1]$). A droite, nous avons choisi $\varepsilon_2 = 4/5$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$ (un intervalle plus resserré autour de x_0 qu'à gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande verte (i.e. $[\ell - \varepsilon_2, \ell + \varepsilon_2]$).



Ci-dessus à gauche, la fonction g n'admet pas de limite en x_0 . En effet, si elle admettait une limite finie l , alors on aurait $l = g(x_0)$. Mais si on prend $\varepsilon = 1/2$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image par g dans la bande bleue. Ci-dessus à droite, la fonction h n'admet pas non plus de limite en $x_0 = b$ (l'extrémité droite de I). En effet, si elle admettait une limite finie l , alors on aurait $l = h(x_0)$. Mais si on prend $\varepsilon = 1/2$ (bande verte), on ne peut pas trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image par h dans la bande verte.

Remarque : Dans les deux exemples ci-dessus, l'absence de limite finie en x_0 provient du fait que la courbe de la fonction présente un saut en x_0 . Cela renvoie à l'approche intuitive de la notion de continuité (que l'on verra de façon rigoureuse dans les prochains paragraphes) : une fonction est continue en x_0 si l'on peut tracer sa courbe au voisinage de x_0 sans lever le crayon.

3) Premières propriétés

Proposition 5 (unicité de la limite). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I ou une éventuelle extrémité finie de I . Si f admet $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ comme limite alors $l = l'$.

DÉMONSTRATION.

□

Nous pouvons donc parler de la limite d'une fonction en point :

Définition 6. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de I ou une éventuelle extrémité finie de I . Si f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 , alors on dit que l est la limite de f en x_0 et on note

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad l = \lim_{x \rightarrow x_0} f \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l.$$

Remarque : On peut toujours se ramener à une limite en 0 en utilisant l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} \ell \iff f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\longrightarrow} \ell.$$

On peut aussi se ramener à une limite nulle :

Proposition/Définition 7 (développement limité à l'ordre 0). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité finie de I . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet ℓ pour limite en x_0 .
2. Il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ell + \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 .

↔ EXERCICE.

4) Continuité en un point

a) Définition

La définition de la continuité en un point repose sur la proposition suivante :

Proposition 8. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite finie ℓ en $x_0 \in I$ alors $\ell = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION.

□

Définition 9 (continuité en un point). Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en $x_0 \in I$ si f admet une limite en x_0 (cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$), c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon).$$

Dans le cas contraire on dit que f est discontinue en x_0 ou que x_0 est un point de discontinuité de f .

Remarques :

- La continuité de f en un point est une notion locale : seul compte le comportement de f au voisinage de ce point.
- La notion de continuité en x_0 n'est pas définie lorsque x_0 est une (éventuelle) extrémité réelle de I qui n'appartient pas à I . Dans le prochain paragraphe, nous introduisons la notion de prolongement par continuité.

b) Prolongement par continuité

Proposition/Définition 10. Soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ et à valeurs réelles. Supposons que f admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 . Posons

$$\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\}, \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases} .$$

Alors \tilde{f} est continue en x_0 . On l'appelle prolongement par continuité de f en x_0 .

DÉMONSTRATION.

□

Exemple : La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x \ln(|x|)$ est définie sur \mathbb{R}^* . Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(|x|) = 0$ (nous montrerons cela ultérieurement : il s'agit d'une croissance comparée). Ainsi on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

5) Limite et continuité à gauche et à droite

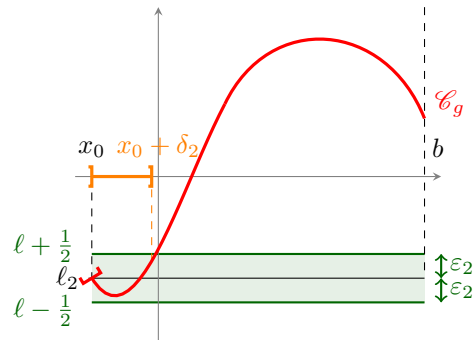
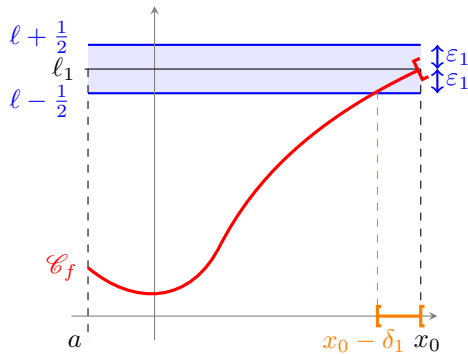
a) Limite à gauche et à droite

Définition 11 (limite à gauche). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ n'étant pas l'extrémité gauche de I . Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 (ou pour limite en x_0^-) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Définition 12 (limite à droite). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ n'étant pas l'extrémité droite de I . Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 (ou pour limite en x_0^+) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



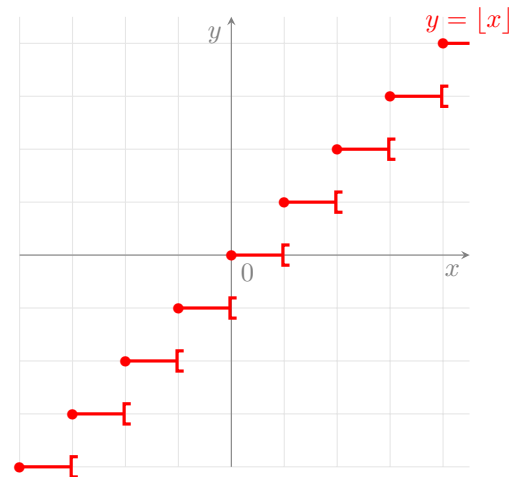
Ci-dessus $x_0 \in I$. A gauche la fonction g est continue à gauche en x_0 . Nous avons choisi $\varepsilon_1 = 1/2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0[$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1, \ell + \varepsilon_1]$). A droite la fonction g est continue à droite en x_0 . Nous avons choisi $\varepsilon_2 = 1/2$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta_2]$, les valeurs de $g(x)$ se retrouvent dans la bande verte (i.e. $[\ell - \varepsilon_2, \ell + \varepsilon_2]$).

Exemple : La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet des limites à gauche et à droite en chaque réel. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

et, pour tout $x_0 \in]k, k + 1[$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lfloor x \rfloor = k.$$



Proposition 13. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou l'extrémité droite (resp. gauche) de I . Si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en x_0 , alors celle-ci est unique.

↪ EXERCICE.

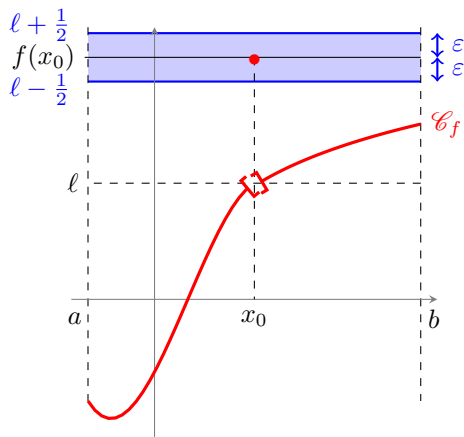
Définition 14. Si f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche en x_0 , alors on dit que ℓ est la limite à gauche de f en x_0 et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\ell = \lim_{x_0^-} f$ ou $f(x) \rightarrow \ell$.

Si f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à droite en x_0 , alors on dit que ℓ est la limite à droite de f en x_0 et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\ell = \lim_{x_0^+} f$ ou $f(x) \rightarrow \ell$.

Proposition 15. Si $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ à valeurs réelles, alors

$$\lim_{x_0} f = \ell \iff \lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = \ell.$$

↪ EXERCICE.



Sur l'exemple ci-contre la fonction est définie sur $I = [a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 qui sont égales (à l ici). Cependant $l \neq f(x_0)$. La fonction n'est pas continue en x_0 .

Proposition 16. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x_0} f = l \iff \begin{cases} \lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = l, \\ l = f(x_0). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

□

b) Continuité à gauche ou à droite en un point

Définition 17 (continuité à gauche). Soit x_0 un point de I qui n'est pas l'extrémité gauche de I . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue à gauche x_0 si f admet $f(x_0)$ pour limite à gauche en x_0 , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Définition 18 (continuité à droite). Soit x_0 un point de I qui n'est pas l'extrémité droite de I . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue à droite x_0 si f admet $f(x_0)$ pour limite à droite en x_0 , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Exemples :

- La fonction partie entière est continue à droite en tout $x_0 \in \mathbb{Z}$ mais pas continue à gauche (bien qu'admettent des limites à gauche).
- Nous verrons au second semestre que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est continue à droite en tout réel et admet des limites à gauche en tout réel (mais elle n'est pas continue à gauche a priori).

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 16.

Proposition 19. Soit x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I . Nous avons f continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0 .

6) Limite infinie en un point de \mathbb{R}

Définition 20 (limite infinie). Supposons que I admette une extrémité finie x_0 qui n'appartient pas à I . On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet $+\infty$ pour limite en x_0 si

$$\forall A \underset{<}{\geq} 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad f(x) \underset{\leq}{\geq} A.$$

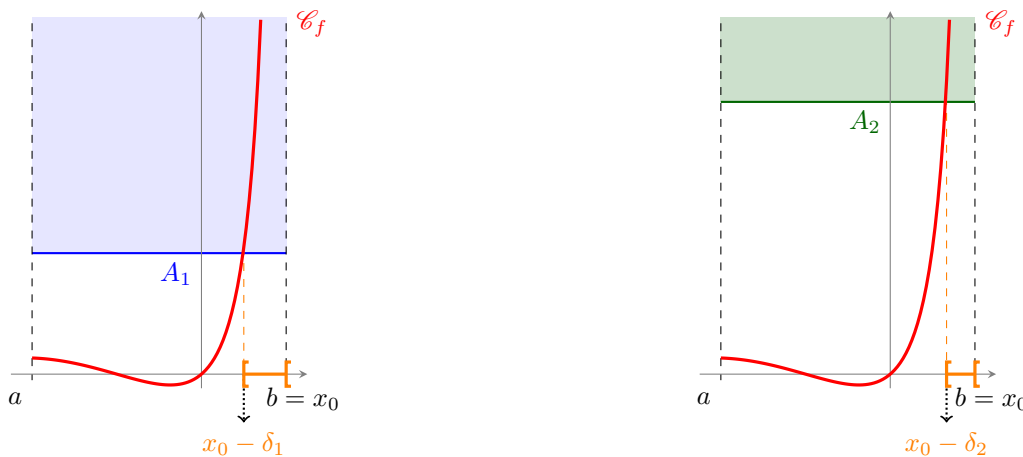
Définition 21 (limite infinie à gauche). Soit x_0 un point de I ou l'éventuelle extrémité droite finie de I . Soient $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à gauche en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, \quad f(x) \leq A.$$

Définition 22 (limite infinie à droite). Soit x_0 un point de I ou l'éventuelle extrémité gauche finie de I . Soient $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], \quad f(x) \geq A.$$

Remarque : Les notations des définitions 6 et 14 s'étendent au cas où $\ell = \pm\infty$.



Ci-dessus f est définie sur $I = [a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. La fonction f tend vers $+\infty$ en $x_0 = b$. A gauche, nous avons choisi $A_1 = 2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0[$, les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande bleue (i.e. $[A_1, +\infty[$). A droite, nous avons choisi $A_2 = 9/2$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_2, x_0[$ (un intervalle plus resserré autour de x_0 qu'à gauche), les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande verte (i.e. $[A_2, +\infty[$).

7) Limite en $\pm\infty$

Définition 23 (limite finie en $\pm\infty$). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $+\infty$ est une extrémité de I , alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \geq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

2. Si $-\infty$ est une extrémité de I , alors on dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Proposition 24 (unicité de la limite). Si f admet une limite finie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), alors celle-ci est unique.

↔ EXERCICE.

Définition 25 (limite infinie en $\pm\infty$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $+\infty$ est une extrémité de I , alors on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \geq B \implies f(x) \geq A).$$

2. Si $-\infty$ est une extrémité de I , alors on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \leq B \implies f(x) \leq -A).$$

Remarque : Les notations des définitions 6 et 14 s'étendent au cas où $\ell = \pm\infty$ et où x_0 est un point de I ou un extrémité (éventuellement infinie) de I .

8) Notion d'adhérence d'un intervalle (hors programme)

Terminons par la notion d'adhérence qui n'est pas au programme mais elle est cependant usuelle et elle va nous permettre d'unifier de nombreux résultats. Nous ne rencontrerons pas cette notation en exercice et il ne faut pas l'utiliser dans une copie (à moins de la redéfinir).

Définition 26 (adhérence). On appelle adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on note \overline{I} , l'ensemble des éléments de I et de ses extrémités dans $\overline{\mathbb{R}}$. Un point de \overline{I} est appelé point adhérent de I dans $\overline{\mathbb{R}}$. Un point adhérent est donc un point de I ou une extrémité de I .



Ne pas confondre l'adhérence avec le complémentaire dans \mathbb{R} .

Remarque : On peut résumer toutes les définitions de limite :

Soient $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \overline{I}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap W$, $f(x) \in V$.

II Résultats généraux sur les limites

1) Théorèmes de composition des limites

a) Image d'une suite convergente par une fonction

Théorème 27. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet ℓ pour limite en x_0 et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0 , alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

DÉMONSTRATION.

□

Exemple :

Proposition 28. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in I$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0 , alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

↔ EXERCICE.

Exemple :

b) Limite et continuité d'une fonction composée

Théorème 29. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$. Soit J un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Soient $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

DÉMONSTRATION.

□

Proposition 30. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in I$. Soit J un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Si $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0 .

↔ EXERCICE.

2) Limites et relation d'ordre

La plupart des propositions suivantes sont analogues (et leur preuve aussi) à celles sur les suites admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 31. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0 , alors f est bornée sur un voisinage de x_0 dans I .

DÉMONSTRATION.

□

Proposition 32. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 . Si a et b sont deux réels tels que $a < \ell < b$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap V$, $f(x) \in]a, b[$.

DÉMONSTRATION.

□

Proposition 33. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{I}$.

1. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ou $+\infty$ en x_0 , alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) > 0$.
2. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_-^*$ ou $-\infty$ en x_0 , alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) < 0$.



↔ EXERCICE.

Les deux résultats précédents permettent de transférer des propriétés d'ordre sur la limite aux images de la fonction (sur un voisinage). Nous allons voir que des propriétés d'ordre sur la fonction se transfèrent sur la limite.

Théorème 34 (passage à la limite). Soit $x_0 \in \overline{I}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 . Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 . Supposons que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Alors $\ell \leq \ell'$.

DÉMONSTRATION. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0 . Le théorème 27 entraîne que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' . Nous avons $f(u_n) \leq g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell \leq \ell'$. On aurait bien sûr pu faire une preuve directe. □

Remarques :

- La conclusion du théorème est toujours vraie si $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de x_0 .
-  Pour utiliser ce théorème on doit auparavant avoir montré la convergence des suites.
-  Il n'y a pas conservation des inégalités strictes : si $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$, alors on peut seulement conclure que $\ell \leq \ell'$.

Par exemple, considérons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < g(x)$. Pourtant f et g admettent tous les deux 1 pour limite en $+\infty$.

Corollaire 35. Soient $x_0 \in \bar{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant ℓ pour limite en x_0 .

1. Supposons que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq m$. Alors $\ell \leq m$.
2. Supposons que, pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$. Alors $m \leq \ell$.

Théorème 36 (théorème d'encadrement). Soient $x_0 \in \bar{I}$. Soient f , g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Supposons que

- Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Les fonctions f et h admettent $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 .

Alors g admet ℓ pour limite en x_0 .

DÉMONSTRATION.

□

Corollaire 37. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

1. Si pour tout $x \in I$, $|f(x) - \ell| \leq g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.
2. Si f est bornée sur I , alors $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Théorème 38. Soient $x_0 \in \bar{I}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si f admet $+\infty$ pour limite en x_0 , alors g aussi.
2. Si g admet $-\infty$ pour limite en x_0 , alors f aussi.

↪ EXERCICE.

Remarque : Tous les résultats de ce paragraphe restent vrais si les propriétés d'ordre n'ont lieu qu'au voisinage de x_0 et pas forcément sur I tout entier (il suffit de restreindre I au voisinage en question).

3) Opérations algébriques sur les limites

Définition 39. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

- On dit que $f(x)$ admet 0^+ pour limite en x_0 et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$ si f admet 0 pour limite en x_0 et est strictement positive sur un voisinage de x_0 .
- On dit que $f(x)$ admet 0^- pour limite en x_0 et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^-$ si f admet 0 pour limite en x_0 et est strictement négative sur un voisinage de x_0 .

Proposition 40. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$, alors $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} |\ell|$.
2. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ si et seulement si $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

↪ EXERCICE.

Proposition 41. Soient ℓ et ℓ' des réels. Soit $x_0 \in \bar{I}$. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I et admettant des limites en x_0 .

On parle de forme indéterminée (et on note F.I.) lorsqu'on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les fonctions (du moins de manière générale).

cf. **formulaire Opérations sur les limites.**

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple que $\frac{1}{g}$ tend vers $\frac{1}{\ell'}$ en $x_0 \in I$ dans le cas où $\ell' \neq 0$.

Remarque : Rappelons qu'il y a quatre types principaux de formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Dans ce cas, il faut faire une étude au cas par cas.

4) Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point

Nous déduisons des opérations algébriques sur les limites celles sur les fonctions continues en un point.

Proposition 42. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions

$$|f|, \quad \lambda|f|, \quad f + g \quad \text{et} \quad fg$$

sont continues en x_0 . De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0 .

III Le théorème de la limite monotone pour les fonctions

La monotonie d'une fonction (qui est une propriété globale, c.f le prochaine chapitre) permet de montrer l'existence de limites.

Proposition/Définition 43. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est majorée sur I , alors l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est non vide est majoré. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\sup_{x \in I} f(x)$ ou $\sup_I f$.
- Si f est minorée sur I , alors l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est non vide est minoré. Il admet donc une borne inférieure que l'on note $\inf_{x \in I} f(x)$ ou $\inf_I f$.

Théorème 44 (théorème de la limite monotone). Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. Si f est majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b et cette limite est .
Sinon f admet $+\infty$ pour limite en b .
2. Si f est minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a et cette limite est .
Sinon f admet $-\infty$ pour limite en a .
3. Pour tout $x_0 \in]a, b[$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite. De plus

Remarque : Nous avons des résultats analogues quand f est décroissante (remplacer f par $-f$).