III Lois finies usuelles

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1) Loi certaine

Définition 1. *On dit qu'une variable aléatoire réelle finie X sur Ω suit une loi certaine si*

La réel a est appelé le paramètre de la loi.

Remarque : Par abus de notation, on considère en général que $X(\Omega) = \{a\}$. En fait il se peut que X prennent d'autres valeurs mais avec une probabilité nulle.

Proposition 2. *Si X suit la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) =$ et $\mathbb{V}(X) =$.*

Démonstration.

□

Théorème 3 (caractérisation de la loi certaine). *Soit X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.*

Démonstration.

□

2) Loi uniforme

Définition 4. *Soit A une partie finie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire réelle finie X sur Ω suit la loi uniforme sur A si* *et*

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$.

Remarques :

- La loi uniforme est la loi que l'on rencontre dans les situations d'équiprobabilité : toutes les valeurs prises par une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sont équiprobables.
- La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

Exemples :

- *On lance un dé équilibré à 6 faces. La variable aléatoire X qui donne le résultat obtenu suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.*
- *On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard. La variable aléatoire X qui donne le numéro de la boule tirée suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.*

Proposition 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \boxed{}.$$

DÉMONSTRATION.

□

Corollaire 6. *Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \leqslant b$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$. En particulier*

$$\mathbb{E}(Y) = \boxed{} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \boxed{}.$$

DÉMONSTRATION.

□

3) Loi de Bernoulli

Définition 7. *Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle finie X sur Ω suit la loi de Bernoulli de paramètre p si* $\boxed{}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. La paramètre p (resp. $q = 1 - p$) est appelé probabilité de succès (resp. d'échec).

Remarques :

- La loi de Bernoulli est la loi que l'on rencontre lorsqu'il n'y a que deux issues possibles à une expérience : succès et échec. En général on code le succès par la valeur 1 et l'échec par la valeur 0. On peut dans tous les cas s'y ramener facilement : si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si X est une variable aléatoire réelle finie qui ne prend que les valeurs a et b (avec probabilités non nulles), alors $Y = \dfrac{X - a}{b - a} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = b)$.
- La fonction de répartition d'une v.a. X de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ est

$$F_X : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1 - p & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

Exemples :

- *On lance une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité qu'elle tombe sur Pile soit $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce tome sur Pile et 0 si elle tombe sur face. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.*
- *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.*
- *On tire 5 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes. On note X la variable aléatoire égale à 1 s'il y a un trèfle, 0 s'il n'y en a pas. Un univers associé à cette expérience est Ω l'ensemble des tirages possibles. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.*

Proposition 8. *Soit $p \in]0,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \boxed{}.$$

Démonstration.

□

Exemple :

4) Loi binomiale

Définition 9. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle finie X sur Ω suit la loi de binomiale de paramètres n et p si* $\boxed{}$ *et*

$$\boxed{}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. La paramètre p (resp. $q = 1-p$) est appelé probabilité de succès (resp. d'échec).

Remarques :

- Avec la formule du binôme de Newton, on vérifie que

$$\boxed{}$$

- $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p.
- La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

Proposition 10. *On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans n répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p.*

Démonstration.

Ainsi, pour montrer qu'une v.a. X suit une loi binomiale, on a deux possibilités :

- Soit on calcule explicitement la loi de X : on montre que
  - il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  - il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\quad}$.

  La v.a. X suit alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
- Soit on justifie que X compte le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètre de succès p.

  Il est impératif de justifier que les épreuves de Bernoulli sont indépendantes !

Exemples :

- *On dispose d'une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité qu'elle tombe sur Pile soit $p \in]0,1[$. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois la pièce successivement et on note X le nombre de fois où la pièce est tombée sur Pile. On peut supposer que les lancers successifs sont indépendants. La variable aléatoire X représente alors le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.*
- *On dispose d'une urne contenant r boules rouges et b boules bleues (avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On effectue n tirages successifs avec remise de boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues. On peut supposer que les tirages successifs sont indépendants. Tirer une boule rouge dans l'urne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{r}{r+b}$. La variable X compte le nombre de succès dans n répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+b}\right)$.*

Proposition 11. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{\quad} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \boxed{\quad}.$$

Démonstration.