Chapitre 10

Variables aléatoires finies

Lorsqu'on étudie un phénomène, on est amené à étudier des variables, des grandeurs numériques liées à ce phénomène. De façon informelle, une variable aléatoire réelle est un nombre lié à une expérience aléatoire dont la valeur dépend exclusivement du résultat ω de cette expérience. Mathématiquement, une variable aléatoire est donc une fonction à valeurs réelles définie sur l'univers Ω associé à l'expérience.

Quelques exemples de variables aléatoires :

- la somme des chiffres obtenus en lançant deux dés.
- le nombre moyen d'appels reçus par un standard téléphonique en une heure.
- la durée de vie d'une ampoule.

Pour le moment on se limite aux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini. Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers fini.

I Variable aléatoire réelle finie

1) Définitions et exemples

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. Une variable aléatoire réelle finie sur* Ω *est une application* $X \; : \; \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$.
L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ *est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* X. *On l'appelle univers image de* X

Remarques :

- Cette définition n'est valable que dans le cas des univers finis. Nous verrons au second semestre la notion de variables aléatoires réelles sur des espaces probabilisables quelconques.
- Si Ω est finie, alors $X(\Omega)$ est fini et $\mathrm{card}(X(\Omega)) \leqslant \mathrm{card}(\Omega)$.
- Dans « variable aléatoire réelle finie », l'adjectif
  - « réelle » désigne le fait que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
  - « fini » désigne le fait que l'ensemble des valeurs prises par X est fini.

  Nous verrons au second semestre que l'on peut définir une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisable qui n'est pas fini.
- Pour abréger, on pourra écrire *v.a.r.* au lieu de *variable aléatoire réelle*.
- Généralement une variable aléatoire se note avec une lettre majuscule (le plus souvent S, T, U, V, W, X, Y, Z).

Exemples :

Définition 2. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et* X *une variable aléatoire réelle finie sur* Ω. *On note*

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}, \qquad [X > a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\},$$
$$[X < a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}, \qquad [X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\},$$
$$[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}, \qquad [a \leqslant X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\},$$
$$\dots$$

Plus généralement, si A *est une partie de* $\mathbb{R}$, *alors on note* $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Remarques :

- Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on rencontre aussi $X^{-1}(A)$ pour désigner $[X \in A]$. On dit qu'il s'agit de l'image réciproque de A par l'application X (*cf. DM5*).
- Ces définitions permettent en quelque sorte d'« oublier » l'espace probabilisable sur lequel est défini la variable aléatoire X, et de voir X comme un nombre aléatoire. Le plus souvent on ne précisera pas l'univers et on définira les variables aléatoires par des phrases.

  Par exemple : on lance deux dés et on note X *la somme des chiffres des deux faces obtenues.*
- Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Exemple : *Reprenons l'exemple précédent où* X *est la variable aléatoire représentant la somme des chiffres des faces obtenues par le lancer de deux dés à 6 faces (définie sur l'univers* $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ *muni de la probabilité uniforme). Nous avons, par exemple*

Proposition 3 (Système complet associé à une variable aléatoire réelle finie). *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. Si* X *est une variable aléatoire réelle finie sur* Ω, *alors* $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ *est un système complet d'événements. On l'appelle le système complet associé à* X.

Remarque : Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors le système complet associé à X est $([X = x_i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Démonstration.

□

Exemple : *On lance trois fois une pièce de monnaie. Soit* X *la variable aléatoire qui donne le nombre de Pile obtenus.*

2) Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 4. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle loi (de probabilité) de X l'application* $\mathscr{L}_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X=x]) \end{array}$.
La loi de probabilité de X est aussi notée $\mathbb{P}_X$.

Remarques :

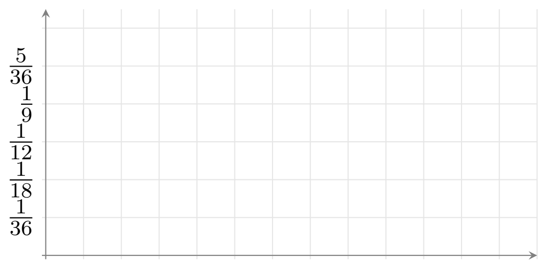
- Autrement dit, la loi d'une v.a. réelle finie X est la donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités $\mathbb{P}([X=x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
- Pour abréger, on note plutôt $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X < x)$, ... au lieu de $\mathbb{P}([X \in A])$, $\mathbb{P}([X = x])$, $\mathbb{P}([X < x])$, ...
- Pour représenter la loi d'une variable aléatoire réelle finie X, on peut
  - — dresser un tableau faisant correspondre $\mathbb{P}(X = x)$ et x, pour chaque $x \in X(\Omega)$.
  - — construire un diagramme en bâtons (pour chaque $x \in X(\Omega)$, on trace un bâton de longueur $\mathbb{P}(X = x)$ situé à l'abscisse x).
  - — donner une formule générale pour $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.

Exemple : *Reprenant l'exemple de la variable aléatoire X donnant la somme des chiffres obtenus lors du lancer de deux dés à six faces (définie sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme). Déterminons sa loi :*

On peut résumer cela dans le tableau :

x											
$\mathbb{P}(X = x)$											

ou via le diagramme en bâtons :



Définition 5. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies toutes deux définies sur des espaces probabilisés (pas forcément les mêmes). On dit que X et Y sont égales en lois (ou qu'elles ont la même loi) si $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$. On note alors $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.*

Exemple : *On lance une pièce de monnaie bien équilibrée et on pose $X = 1$ si la pièce tombe sur Pile et $X = 0$ si elle tombe sur Face (définie par exemple sur $\Omega_1 = \{0,1\}$ muni de la probabilité uniforme). On lance un dé à 6 faces bien équilibré et on pose $Y = 1$ si le chiffre de la face obtenue est pair et $Y = 0$ s'il est impair (définie sur $\Omega_2 = [\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme).*

Proposition 6. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω, alors*

Démonstration.

$\square$

Remarques :

- Il faut toujours vérifier cette condition au préalable lorsqu'on donne une loi de probabilité.
- En particulier, cela entraîne qu'il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$.
- Si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors

Théorème 7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Alors il existe un espace probabilité fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle finie X sur Ω telle que*

- *$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,*
- *pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.*

Démonstration.

$\square$

Remarques :

- Autrement dit, il existe une variable aléatoire de loi $\mathscr{L}_X \ : \ \begin{array}{ccc} \{x_1, \dots, x_n\} & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & p_i \end{array}$.
- Forcément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.
- Il n'y a unicité ni de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, ni de la variable aléatoire X.
- ⚠ A priori Ω peut comporter des événements élémentaires de probabilité nulle et, dans ce cas, il se peut que la probabilité que X prenne certaines valeurs de $X(\Omega)$ soit nulle. Mais en général on suppose que Ω est tel que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

Exemple :

Définition 8. *Si $\mathscr{L}$ est une application définie sur un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}(x_i) = 1$, alors on dit que $\mathscr{L}$ est une loi de probabilité finie sur $\mathbb{R}$.*

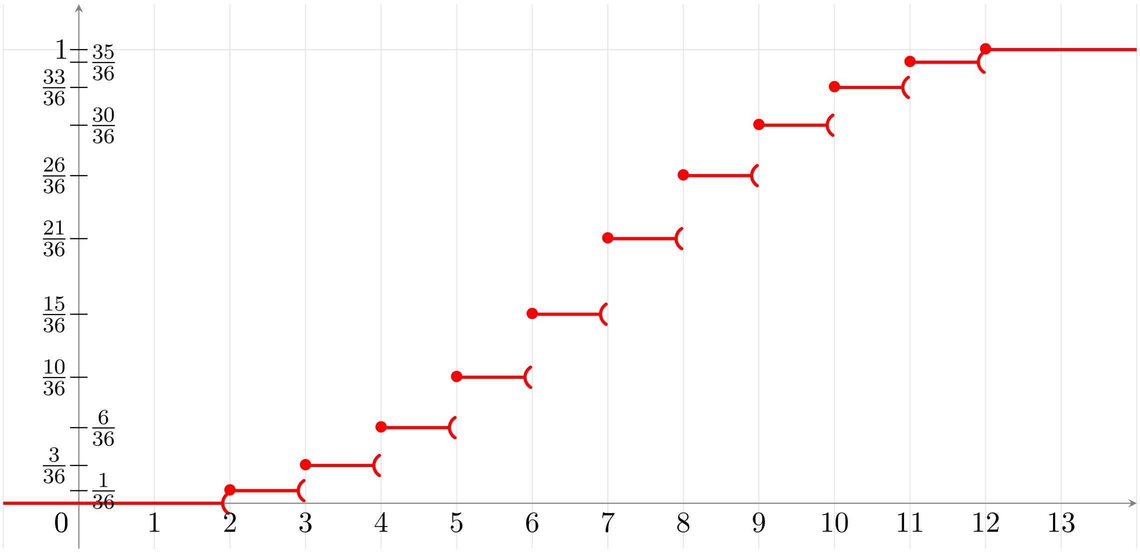
L'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ est appelé support de la loi $\mathscr{L}$.

Si X est une variable aléatoire réelle finie dont la loi est $\mathscr{L}$, alors on dit que X suit la loi $\mathscr{L}$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$.

3) Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Définition 9. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω. L'application* $F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant t) \end{array}$ *est appelée fonction de répartition de X.*

Exemple : *Reprenant l'exemple de la variable aléatoire X donnant la somme des chiffres des faces obtenues par le lancer de deux dés à 6 faces (définie sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme). Traçons la courbe de F_X, sa fonction de répartition :*



Proposition 10. *Si X est une variable aléatoire réelle finie, alors sa fonction de répartition F_X ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Plus précisément, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x_i \leqslant t}} \mathbb{P}(X = x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < x_1, \\ \mathbb{P}(X = x_1) & \text{si} \quad x_1 \leqslant t < x_2, \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) & \text{si} \quad x_2 \leqslant t < x_3, \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3) & \text{si} \quad x_3 \leqslant t < x_4, \\ \vdots & \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_{n-1}) & \text{si} \quad x_{n-1} \leqslant t < x_n, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant x_n. \end{cases}$$

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarques :

- Retenons que F_X est nulle sur $]-\infty, x_1[$, constante égale à 1 sur $[x_n, +\infty[$. De plus

  $\forall k \in [\![1, n]\!],$

  et F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
- Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire finie X vérifie également :
  — F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
  — $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = \boxed{}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = \boxed{}$.

— Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F_X(t) =$ $\qquad$ et $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) =$ $\qquad$.

La fonction de répartition F_X est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = t_0) = 0$.

Nous verrons au second semestre que ces propriétés sont vraies pour des fonctions de répartitions de variables aléatoires réelles plus générales..

Pour définir la loi d'une variable aléatoire réelle finie sur Ω, il suffit de donner sa fonction de répartition, en vertu du théorème suivant :

Théorème 11 (La fonction de répartition caractérise la loi). *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies ayant la même fonction de répartition, alors $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.*

DÉMONSTRATION.

□

Dans ce chapitre, nous rencontrerons surtout des variables aléatoires réelles finies X telles que $X(\Omega) \subset [\![m, n]\!]$ avec m et n des entiers relatifs tels que $m \leqslant n$. Dans ce cas particulier, nous avons pour tout $k \in [\![m, n]\!]$,

- $\mathbb{P}(X = k) =$
- $\mathbb{P}(X = k) =$
- $\mathbb{P}(X = k) =$
- $F_X(k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)$ $\qquad$ et $\mathbb{P}(X \geqslant k) =$

4) Transfert d'une variable aléatoire

Proposition/Définition 12. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini et X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Si $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $Y \ : \ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega)) \end{array}$ est une variable aléatoire réelle finie, notée $g(X)$, et appelée transfert de X par f.*

Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \{g(x_1), \ldots, g(x_n)\}$.

Remarque : On a $\mathrm{card}(Y(\Omega)) \leqslant \mathrm{card}(\Omega)$ (il se peut que $g : X(\Omega) \longrightarrow Y(\Omega)$ ne soit pas injective).

Exemple : *On lance deux dés à 6 faces bien équilibrés. Soit Y la variable aléatoire donnant la différence des chiffres du premier dé et du second. Posons $Z = |Y|$.*

x											
$\mathbb{P}(Y = x)$											
$\mathbb{P}(Z = x)$											