Programme de colles - Semaine n° 8

du 13 au 17 novembre 2017

Chapitre 7 - Ensembles et applications

Identique au programme de la semaine 7.

Chapitre 8 - Complément de combinatoire

- Ensemble fini et cardinal (définitions intuitives)
  - Un ensemble en bijection avec un ensemble fini est fini et a le même cardinal.
  - Cardinal de l'union disjointe d'une famille finie de parties. Cardinal du complémentaire d'une partie. Formule de Poincaré pour deux et pour trois parties. Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis. Si E est un ensemble à n éléments, alors $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- Listes, arrangements, permutations, combinaisons
  - Dénombrement des listes de p éléments d'un ensemble à n éléments.
  - Dénombrement des listes de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments (arrangements) et des permutations de n éléments.
  - Dénombrement des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (combinaisons). Coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Binôme de Newton.
  - Tirages successifs avec ou sans remise. Tirages simultanés.

Chapitre 9 - Probabilités sur un univers fini (première partie)

- Espaces probabilisables finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
  - Expérience aléatoire. Notions d'univers et d'événements. Événements élémentaires, certain, impossible. Événements incompatibles.
  - Opérations sur les événements. Système complet (fini) d'événements.
- Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$
  - Probabilité sur un espace probabilisable fini. Premières propriétés. Additivité finie. Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
  - Probabilités et systèmes complet d'événements. Une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.
  - Cas d'équiprobabilité.

Démonstrations à connaître :

- Union et intersection d'une famille quelconque de parties : lois de Morgan et distributivité.
- La composée de deux injections (resp. surjections, resp. bijections) est une injection (resp. surjection, resp. bijection).
- La formule du binôme de Newton (démonstration par récurrence).
- Premières propriétés[1] des probabilités sur un espace probabilisable fini.
- Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
- Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$. Cas particulier du système complet composé des événements élémentaires.

Prévisions pour la semaine 9 : chapitre 9 en intégralité (probabilités conditionnelles, indépendance, schéma binomial) et début du chapitre 10 (variables aléatoires réelles finies).

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et, si $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ et $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$