Programme de colles - Semaine n° 6

du 16 au 20 octobre 2017

Chapitre 5 - Généralités sur les suites de nombres réels

Identique au programme de la semaine 5.

Chapitre 6 - Convergence de suites réelles

- Bornes supérieures et inférieures
  - Majorant, minorant, maximum, minimum. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum (resp. un minimum).
  - Borne supérieure, inférieure sur $\mathbb{R}$. Caractérisation. Théorème de la borne supérieure.
  - Partie entière d'un réel.
- Suites convergentes
  - Définition quantifiée. Unicité de la limite.
  - Exemples fondamentaux (convergence vers 0 des suites $(n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]-1,1[$).
  - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
  - Opérations algébriques sur les limites et élévation à une puissance $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - Suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Suites tendant vers $\pm\infty$
  - Définition quantifiée. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Unicité de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
  - Exemples fondamentaux (convergence vers $+\infty$ des suites $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^{\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]1,+\infty[$).
  - Limites infinies et relation d'ordre.
  - Opérations algébriques sur les suites admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Formes indéterminées.
  - Croissances comparées.
- Limites de suites monotones
  - Théorème de la limite monotone
  - Suites adjacentes
- Exemples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$
  - Condition nécessaire de convergence vers un point fixe de f, dans le cas où f est continue.

Démonstrations à connaître :

- Expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique (attention aux cas particuliers où la suite est géométrique ou arithmétique).
- Unicité de la limite d'une suite convergente (utilisant la définition quantifiée).
- Convergence vers 0 des suites $(n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]-1,1[$.
- Convergence vers $+\infty$ des suites $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^{\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]1,+\infty[$.
- Théorème de la limite monotone.

Prévisions pour la semaine 7 (après les vacances) : chapitre 6 et chapitre 7 (Ensembles et applications).