Programme de colles - Semaine n° 4

du 2 au 6 octobre 2017

Chapitre 3 - Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

Identique au programme de la semaine 3.

Chapitre 4 - Nombres complexes et trigonométrie

- Propriétés fondamentales des nombres complexes
  - Opérations algébriques sur les nombres complexes. Sommes de nombres complexes (binôme de Newton, factorisation de $z^n - (z')^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, somme géométrique).
  - Conjugué et module d'un nombre complexe. Inégalité triangulaire.
- Formules de trigonométrie sur le cosinus, le sinus et la tangente (résolution d'équations et inéquations trigonométriques).
- Forme trigonométrique d'un complexe non nul
  - Argument d'un complexe non nul. Formes trigonométriques et exponentielles d'un complexe non nul. Propriétés de l'exponentielle d'un imaginaire pur.
  - Formules de Moivre et d'Euler. Applications au développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ et à la linéarisation de $\cos^p(\theta)$, $\sin^q(\theta)$ et $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$.
- Équations polynomiales complexes
  - Recherche des racines carrées d'un complexe non nul.
  - Équations du second degré à coefficients complexes.
  - Racines n-ième de l'unité.
    Conformément au programme d'ECS, les résultats concernant les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants mais ces dernières pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.

Démonstrations à connaître :

- Existence et unicité de la racine n-ième d'un réel positif (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les réels de $[0,1]$, puis cas des réels de $[1,+\infty[$).
- Continuité et dérivabilité (dont le calcul de la dérivée) de la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha$ avec α un réel (prolongement de la fonction en 0 lorsque $\alpha \geqslant 0$ et dérivabilité en 0 lorsque $\alpha \geqslant 1$).
- Inégalité triangulaire pour les complexes (*la démonstration du cas d'égalité n'est pas au programme de colle.*).
- Formule d'addition de la tangente ($\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$).
- Formule de Moivre[1] : si $n \in \mathbb{Z}$, alors $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
- Forme canonique d'un trinôme du second degré à coefficients complexes.

Prévisions pour la semaine 5 : chapitre 4 et chapitre 5 - Généralités sur les suites de nombres réels.

1. On montre d'abord par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ en utilisant la proposition suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \forall \theta' \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

On en déduit ensuite le cas où $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.