Programme de colles - Semaine n° 28

du 14 au 18 mai 2018

Chapitre 27 - Intégrales sur un intervalle quelconque

- Notion d'intégrale généralisée
  - Intégrale impropre en b (resp. en a, en a et en b) d'une fonction continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, $]a, b[$).
  - Nature d'une intégrale généralisée (convergente ou divergente). Intégrales partielles. Reste d'une intégrale généralisée convergente. Intégrale faussement impropre. Utilisation des primitives.
  - Intégration sur un intervalle privé d'un nombre fini de points.
- Propriétés des intégrales généralisées
  - Relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance.
- Calculs d'intégrales généralisées
  - Dans une IPP ou un changement de variables, il faudra systématiquement se ramener à un segment puis passer à la limite.
  - Intégrales de Riemann : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ (et sa somme vaut $1/\alpha$).
- Critères de convergence d'intégrales généralisées
  - Le cas des fonctions positives : utilisation des intégrales partielles, comparaison des intégrales de fonctions positives avec des inégalités, des "petits o" et des équivalents.
  - Exemple : définition et propriétés de la fonction Γ.
  - Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence. Notion d'intégrale semi-convergentes.

Chapitre 28 - Variables aléatoires à densité *(le début... en question de cours seulement)*

- Généralités sur les variables aléatoires à densité
  - Une v.a. X est à densité si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  - Une v.a. X à densité n'admet pas d'atomes (i.e $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
  - Notion de densité. Interprétation graphique. Une densité f caractérise la loi : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\, dt$. Application : $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ lorsque $a < b$.
  - Caractérisation d'une densité (positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1).
  - Transformation de variables aléatoires à densité. Cas particulier d'une transformation affine.

Démonstrations à connaître :

- Nature des intégrales de Riemann.
- La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha < 1$) alors, pour tout $\beta > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$ converge (resp. diverge).
- Si X est une v.a admettant une densité f alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $aX + b$ est une v.a à densité dont une densité est $x \longmapsto \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Pas de colles les semaines 29 et 30. Prévisions pour la semaine 31 : chapitre 29 : Convergences de variable aléatoires.