Programme de colles - Semaine n° 25

du 9 au 13 avril 2018

Chapitre 24 - Dérivées successives et formules de Taylor

- Dérivées successives

  Identique au programme de la semaine 24
- Formules de Taylor
  - Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme avec les dérivées successives.
  - Formule de Taylor avec reste intégral. Si $f \in D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que $f^{(n)} = 0$, alors $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
  - Inégalité de Taylor Lagrange. Application : convergence de la série exponentielle.
- Application à l'étude d'extrema locaux
  - Notion de point critique. Condition nécessaire d'extremum local
  - Si f est de classe C^2 au voisinage d'un point critique x_0 et si $f''(x_0) > 0$ (resp. < 0) alors x_0 est un minimum (resp. un maximum) local de f. Pas de conclusion si $f''(x_0) = 0$.

Chapitre 25 - Comparaison locale de fonctions

- Fonction négligeable devant une autre
  - Notation $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{x_0}{=} o(g)$.
  - Si g se s'annule pas au voisinage de x_0, alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  - Transitivité, compatibilité avec le produit. Multiplication par une constante. Multiplication par une suite. Valeur absolue. Inverse. Attention à la somme ! Substitution par une fonction ou une suite.
  - Comparaison de fonctions usuelles. Croissances comparées.
- Fonctions équivalentes
  - Notation $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$. On a $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si $f \underset{x_0}{=} g + o(g)$.
  - Si g se s'annule pas au voisinage de x_0, alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
  - Réflexivité, symétrie, transitivité. Lien entre équivalence et limite. Compatibilité avec le produit, le quotient, les puissances. Multiplication par une constante non nulle. Valeur absolue. Inverse. Attention à la somme ! Substitution par une fonction ou une suite.
  - Équivalent en 0 ou $+\infty$ d'une fonction polynomiale.
  - Si f est dérivable sur un voisinage de 0 et $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} xf'(0)$.
  - Au voisinage de 0, $\ln(1+u) \sim u$, $e^u - 1 \sim u$, $(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $1 - \cos(u) \sim \dfrac{u^2}{2}$, $\sin(u) \sim u$, $\tan(u) \sim u$ et $\mathrm{Arctan}(u) \sim u$.

Démonstrations à connaître :

- Formule de Leibniz.
- Caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme avec les dérivées successives.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Chaque question de cours sera accompagnée par la restitution d'un développement limité en 0 *(sans démonstration) choisi par l'examinateur parmi :* $\dfrac{1}{1-u}$, $\dfrac{1}{1+u}$, $\ln(1+u)$, $\ln(1-u)$, $(1+u)^\alpha$, e^u, $\sin(u)$, $\cos(u)$ *à tout ordre et* $\tan(u)$ *à l'ordre* 8.

Prévisions pour la semaine 26 (après les vacances) : chapitre 24, chapitre 25 et chapitre 26 (Développements limités).