Programme de colles - Semaine n° 24

du 2 au 6 avril 2018

Chapitre 23 - Compléments sur les espaces vectoriels

Identique au programme de la semaine 23 avec en plus les projecteurs :

— Projection (vectorielle) p sur F parallèlement à G, un supplémentaire de F dans E.
On a alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

— Un projecteur de E est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
On a alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Chapitre 24 - Dérivées successives et formules de Taylor (le début)

- Dérivées successives
  — Fonctions n fois dérivables sur I. Dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ de f. Notation $D^n(I, \mathbb{R})$.
  — Fonctions de classe C^n sur I. Notation $C^n(I, \mathbb{R})$. Fonctions de classe C^∞ sur I. Notation $C^\infty(I, \mathbb{R})$.
  — Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, sinus, cosinus, tangente et Arctangente sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.
  — Les ensembles $D^n(I, \mathbb{R})$, $C^n(I, \mathbb{R})$ et $C^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-e.v. Formule de Leibniz. Existence de dérivées successives de l'inverse, du quotient, de la composée de fonctions.
  — Si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ alors, pour tout $n > p$, $P^{(n)}$ est le polynôme nul.
- Formule de Taylor pour les polynômes
  — Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
  — Caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme avec les dérivées successives.

Démonstrations à connaître :

- La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \qquad \big(x_1 + \cdots + x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0\big).$$
- La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) est un s.e.v de E (resp. F).
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective (resp. surjective) si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ (resp. $\mathrm{Im}(f) = F$).
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.
- Si E admet une base $(e_1, \dots, e_n)$, alors une application linéaire f est caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs de cette base [1].
- Si $F \oplus G = E$ et si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
- Si p est un projecteur de E, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
- Formule de Leibniz.

Prévisions pour la semaine 25 : chapitre 24 (en intégralité), chapitre 25 (Comparaison local de fonctions) et début du chapitre 26 (Développements limités).

---

1. Si $(v_1, \dots, v_n)$ sont des vecteurs de F, alors $f : x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ est l'unique application linéaire de E dans F telle que $f(e_k) = v_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ *(il y a donc trois choses à montrer)*.