Programme de colles - Semaine n° 23

du 26 au 30 mars 2018

Chapitre 22 - Variables aléatoires discrètes

Identique au programme de la semaine 22.

Chapitre 23 - Compléments sur les espaces vectoriels (sauf les projecteurs)

- Somme d'espaces vectoriels et supplémentaires
  - Somme $F_1 + \cdots + F_n$ d'espaces vectoriels.
  - Somme directe. Notation $\oplus$. La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, si $x_1 + \cdots + x_n = 0$ alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
    Cas particulier pour deux s.e.v : la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
  - Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.
- Généralités sur les applications linéaires
  - Notion d'application linéaire. Notation $\mathcal{L}(E, F)$. Forme linéaire, notation E^*. Endomorphisme, notation $\mathcal{L}(E)$. Isomorphisme. Automorphisme, notation $GL(E)$.
  - Opérations sur les applications linéaire : restriction, somme, multiplication par un scalaire, composition. Réciproque d'un isomorphisme.
  - Puissances d'endomorphismes. Binôme de Newton. Polynômes d'endomorphisme.
  - Image d'un s.e.v par une application linéaire f. Image $\mathrm{Im}(f)$. Noyau $\mathrm{Ker}(f)$. Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité avec le noyau et l'image.
- Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire
  - $f(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.
  - Conditions pour que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ soit génératrice, libre, liée.
  - Si E admet une base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors une application linéaire f est caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs de cette base. De plus $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est libre (resp. génératrice, resp. une base) si et seulement si f est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Démonstrations à connaître :

- Linéarité de l'espérance.
- La variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment qui sont nécessaires pour obtenir le premier succès suit une loi $\mathcal{G}(p)$.
- Espérance et variance d'une v.a X de loi $\mathcal{G}(p)$.
- Espérance et variance d'une v.a X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
- La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \qquad \big(x_1 + \cdots + x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0\big).$$

- La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) est un s.e.v de E (resp. F).
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective (resp. surjective) si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ (resp. $\mathrm{Im}(f) = F$).
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.

Prévisions pour la semaine 24 : chapitre 23 (en intégralité) et chapitre 24 (Dérivées successives et formules de Taylor).