Programme de colles - Semaine n° 22

du 19 au 23 mars 2018

Chapitre 21 - Probabilités sur un univers quelconque

Identique au programme de la semaine 21.

Chapitre 22 - Variables aléatoires discrètes

- Variables aléatoires réelles discrètes (v.a.r.d)
  - — Système complet d'événements associé à une v.a.r.d X.
  - — La loi d'une v.a.r.d est entièrement caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$ et de $\mathbb{P}(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. La fonction de répartition caractérise la loi.
  - — Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, caractérisation d'une v.a.r.d par la donnée d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que la série $\sum p_n$ est convergente de somme 1.
  - — Variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (on montre que $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$ pour pouvoir se ramener à $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).
- Moments d'une v.a.r.d
  - — Espérance. Positivité, linéarité, théorème de transfert. Variable centrée.
  - — Moments d'ordre supérieur.
  - — Variance. Formule de Koenig-Huygens, positivité, $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$. Ecart-type. Variable centrée réduite X^* associée à X.
  - — Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- Variables aléatoires discrètes usuelles
  - — Rappels : loi uniforme sur une partie finie, loi de Bernoulli, loi binomiale.
  - — Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Fonction de répartition, espérance, variance. La v.a comptant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment qui sont nécessaires pour obtenir le premier succès suit une loi $\mathcal{G}(p)$. Loi sans mémoire.
  - — Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Espérance, variance.

Il est très fortement recommandé de connaître particulièrement bien la définition d'une tribu, d'un système complet d'événements et surtout d'une probabilité...

Démonstrations à connaître :

- On lance une infinité de fois une pièce[1]. Alors « obtenir au moins une Face » est un événement presque sûr.
- Formule des probabilités totales.
- Si X est une v.a.r et $x \in \mathbb{R}$, alors $[X<x] = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[X \leqslant x-\frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}$.
- Si X est une v.a.r, alors F_X est continue à droite en tout point[2].
- Linéarité de l'espérance.
- Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- La variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment qui sont nécessaires pour obtenir le premier succès suit une loi $\mathcal{G}(p)$.
- Espérance et variance d'une v.a X de loi $\mathcal{G}(p)$.
- Espérance et variance d'une v.a X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Prévisions pour la semaine 22 : chapitre 22 et chapitre 23 (Compléments aux espaces vectoriels).

1. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience
2. On utilisera, sans le montrer, que $[X \leqslant x] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[X \leqslant x+\frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}$