Programme de colles - Semaine n° 21

du 12 au 16 mars 2018

Chapitre 20 - Séries numériques

Identique au programme de la semaine 20.

Chapitre 21 - Probabilités sur un univers quelconque

- Tribus et événements
  - Notion de tribu $\mathcal{A}$ sur un univers Ω. Espace probabilisable. Premières propriétés.
  - Événements deux à deux incompatibles. Systèmes complets d'événements. Tribu engendrée par un système complet d'événement (existence admise).
- Probabilité sur un espace probabilisable quelconque
  - σ-additivité. Probabilité. Premières propriétés. Cas particulier d'un univers dénombrable.
  - Famille croissante/décroissante d'événements. Propriété de la limite monotone. Formules pour une famille quelconque.
  - Événement négligeable, événement presque sûr. Exemple d'une suite infinie de lancers de pièces.
- Conditionnement et indépendance
  - La probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nulle est une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.
  - Indépendance (mutuelle) d'événements. Théorème des coalitions.
- Variables aléatoires réelles (v.a.r)
  - Une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x] \in \mathcal{A}$. Conséquence : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $[X \in I] \in \mathcal{A}$.
  - Fonction de répartition F_X d'une v.a.r X. Propriétés : F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point, F_X est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$.
  - Loi d'une v.a.r. La fonction de répartition caractérise la loi.

Il est très fortement recommandé de connaître particulièrement bien la définition d'une tribu, d'un système complet d'événements et surtout d'une probabilité...

Démonstrations à connaître :

- Exemple : la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Convergence de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.
- Si une série converge absolument, alors elle converge.
- Exemple : La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente.
- Convergence et somme de la série géométrique dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ lorsque $x \in \,]-1, 1[$.
- On lance une infinité de fois une pièce[1]. Alors « obtenir au moins une Face » est un événement presque sûr.
- Formule des probabilités totales.
- Si X est une v.a.r et $x \in \mathbb{R}$, alors $[X < x] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}$.
- Si X est une v.a.r, alors F_X est continue à droite en tout point[2].

Prévisions pour la semaine 22 : chapitre 21 et chapitre 22 (Variables aléatoires discrètes).

1. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience
2. On utilisera, sans le montrer, que $[X \leqslant x] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}$