Programme de colles - Semaine n° 20

du 5 au 9 mars 2018

Chapitre 19 - Étude asymptotique des suites

Identique au programme de la semaine 19.

Chapitre 20 - Séries numériques

- Généralités sur les séries numériques
  - Série : notation $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. Suite des sommes partielles. Expression du terme général d'une série en fonction des sommes partielles. Nature d'une série. Somme d'une série convergente : notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Reste d'une série convergente.
  - Exemples des séries géométriques et de la série harmonique.
  - La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Condition nécessaire de convergence. Série qui diverge grossièrement. Série télescopique.
  - L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{R}$-e.v. Somme d'une série convergente et d'une série divergente.
- Séries à termes positifs
  - Une série à termes positifs converge si et seulement la suite des sommes partielles est majorée.
  - Critères de convergence des séries à termes positifs (cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$).
  - Convergence des séries de Riemann.
- Séries à termes de signe quelconque
  - Séries absolument convergentes. La convergence absolue implique la convergence. La réciproque est fausse. Séries semi-convergentes.
  - Convergence des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.
  - Série exponentielle[1] .

Démonstrations à connaître :

- Si $u_n = o(x_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n + v_n = o(x_n)$.
- $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.
- Exemple : déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\cos\left(\frac{3n+1}{n^2+5}\right)\right)$.
- Exemple : la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Convergence de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.
- Si une série converge absolument, alors elle converge.
- Exemple : La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente.
- Convergence et somme de la série géométrique dérivée $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ lorsque $x \in \left]-1, 1\right[$.

Définitions supplémentaires à connaître :

- Définition d'une tribu sur un ensemble Ω.
- Définition d'un système complet d'événement (indexée par une partie quelconque de $\mathbb{N}$) d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Prévisions pour la semaine 21 : chapitre 20 et chapitre 21 (Probabilités sur un univers quelconque).

1. La démonstration donnée en cours n'est pas à connaître. Nous en donnerons une autre dans la chapitre *Dérivées supérieures et formules de Taylor*, qu'il faudra connaître par cœur.