

Programme de colles - Semaine n° 19

du 12 au 16 février 2018

Chapitre 18 - Introduction aux espaces vectoriels

Identique au programme de la semaine 18.

Chapitre 19 - Étude asymptotique des suites

- Suite négligeable devant une autre
 - Notation $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.
 - Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.
 - Transitivité, compatibilité avec le produit. Multiplication par une constante. Multiplication par une suite. Valeur absolue. Inverse.
 - On ne somme pas de « petit o » sauf si $u_n = o(x_n)$ et $v_n = o(x_n)$, où alors $u_n + v_n = o(x_n)$.
On n'écrit jamais $u_n = o(0)$.
 - Comparaison de suite usuelles. Croissances comparées. Échelle des suites tendant vers 0 ou vers $+\infty$ (vitesse de convergence).
- Suites équivalentes.
 - Notation $u_n \sim v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
 - Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\rightarrow} 1$.
 - Lien avec les suites négligeables : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.
 - Réflexivité, symétrie, transitivité. Lien entre équivalence et limite. Compatibilité avec le produit, le quotient, les puissances. Multiplication par une constante non nulle. Valeur absolue. Inverse.
 - On ne somme jamais des équivalentes. On n'écrit jamais $u_n \sim 0$. A part l'élevation à une puissance (si cela est bien défini), on ne compose jamais des équivalents à gauche par une fonction
 - Équivalents de polynômes en n ou $1/n$.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$,
 $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$, $\sin(u_n) \sim u_n$, $\tan(u_n) \sim u_n$ et $\text{Arctan}(u_n) \sim u_n$.
 - Formule de Stirling.

Comme chaque semaine, énoncer une définition ou un résultat parmi la liste ci-dessus pourra constituer une question de cours. Il est vivement conseillé de connaître la définition d'un espace vectoriel...

Démonstrations à connaître :

- Premières propriétés des espaces vectoriels : $0 \cdot x = 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$, $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$,
 $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$, $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$ et $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.
- Intersection de sous-espaces vectoriels.
- $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant x_1, \dots, x_n .
- Existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Si $u_n = o(x_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n + v_n = o(x_n)$.
- \sim est réflexive, symétrique et transitive.
- Exemple : déterminer un équivalent simple de $\ln \left(\cos \left(\frac{3n+1}{n^2+5} \right) \right)$.

Prévisions pour la semaine 20 (après les vacances) : chapitre 19 et chapitre 20 (Séries).