Programme de colles - Semaine n° 18

du 5 au 9 février 2018

Chapitre 17 - Matrices

- Ensemble de matrices

  Identique au programme de la semaine 17.
- Matrices carrées

  Identique au programme de la semaine 17.
- Matrices inversibles
  - Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$. Unicité de l'inverse. Inverse d'un produit de matrices inversibles, de la transposée, d'une puissance d'une matrice inversible.
  - Critères d'inversibilité (admis pour le moment) : une matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. Critère du noyau. Lien avec les systèmes de Cramer.
  - Critère d'inversibilité des matrices triangulaires et diagonales. Calcul de l'inverse d'une matrice : cas des matrices d'ordre 2, utilisation des polynômes annulateurs, méthode de Gauss-Jordan.

Chapitre 18 - Introduction aux espaces vectoriels

- Notion d'espace vectoriel.
  - Définitions et premières propriétés.
  - Exemples usuels. Définition de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{K}^n$ et sur $\mathcal{F}(A, E)$ où A est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-e.v. Les ensembles $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{F}(A, E)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v (en particulier l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-e.v et les ensembles $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des $\mathbb{K}$-e.v).
  - Famille finie de vecteurs. Combinaisons linéaires de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels
  - Définitions équivalentes. Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v et F un s.e.v de E, alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
  - Exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Caractérisation de $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.
- Familles libres, génératrices et bases
  - Familles liées, familles libres. Vecteurs colinéaires. Familles génératrices.
  - Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Comme chaque semaine, énoncer une définition ou un résultat parmi la liste ci-dessus pourra constituer une question de cours. Il est vivement conseillé de connaître la définition d'un espace vectoriel...

Démonstrations à connaître :

- Unicité de l'inverse d'une matrice inversible.
- Inverse d'un produit de matrices inversibles.
- Inverse de la transposée d'une matrice inversible.
- Inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- Premières propriétés des espaces vectoriels : $0 \cdot x = 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$, $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$, $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$, $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$ et $\lambda . x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.
- Intersection de sous-espaces vectoriels.
- $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$.
- Existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Prévisions pour la semaine 19 : chapitre 18 et chapitre 19 (Étude asymptotique des suites).