

## Programme de colles - Semaine n° 17

du 29 janvier au 2 février 2018

### Chapitre 15 - Polynômes réels ou complexes

Identique au programme de la semaine 16.

### Chapitre 16 - Systèmes linéaires

- Définition d'un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues à coefficients réels ou complexes
  - Équations, inconnues, coefficients, second membre. Système homogène. Système homogène associé.
  - Systèmes équivalents. Système compatible, incompatible, de Cramer.
- Résolution de systèmes linéaires échelonnés
  - Résolution de systèmes linéaires triangulaires dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls par remontées successives.
  - Pour un système échelonné non triangulaire, on choisit des inconnues auxiliaires que l'on place dans le second membre. On se ramène ainsi à un système triangulaire.
- La méthode du pivot de Gauss
  - Opérations élémentaires :  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ,  $L_i \rightarrow \alpha L_i + \beta L_j$  ( $\alpha \neq 0$ ).
  - Si un système ( $S'$ ) est obtenu à partir d'un système ( $S$ ) en effectuant une succession d'opérations élémentaires, alors ( $S$ ) et ( $S'$ ) sont équivalents.
  - Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Un système linéaire possède ou bien une unique solution, ou bien aucune, ou bien une infinité.

### Chapitre 17 - Matrices (paragraphe I, II, III et IV-1 seulement)

- Ensemble de matrices
  - Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Matrices lignes, colonnes. Matrice nulle. Matrices élémentaires.
  - Somme de matrices, multiplication par un scalaire. Premières propriétés.
  - Produit matriciel. Associativité. Distributivité par rapport au produit.  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  n'est pas intègre. Produit d'une matrice par un vecteur colonne. Matrice associée à un système linéaire.
  - Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.
- Matrices carrées
  - Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Matrice nulle  $O_n$ . Matrice identité  $I_n$ . Le produit n'est pas commutatif. Matrices qui commutent. Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures, symétriques, antisymétriques.
  - Puissances de matrices carrées. Formule du binôme de Newton pour deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Polynômes de matrices carrées. Notion de polynôme annulateur. Application au calcul des puissances successives d'une matrice carrée.
- Matrices inversibles
  - Ensemble  $GL_n(\mathbb{K})$ . Unicité de l'inverse. Inverse d'un produit de matrices inversibles, de la transposée, d'une puissance d'une matrice inversible.

*Démonstrations/exemples à connaître :*

Conformément au programme, aucune démonstration de cours n'est exigible des étudiants pour le chapitre 15.

- Factorisation de  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- Associativité du produit matriciel.
- Transposition d'un produit de deux matrices.
- Formule du binôme de Newton pour deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent.
- Unicité de l'inverse d'une matrice inversible.
- Inverse d'un produit de matrices inversibles.
- Inverse de la transposée d'une matrice inversible.

**Prévisions pour la semaine 18 :** chapitre 17 (en entier) et chapitre 18 (Introduction aux espaces vectoriels).