Programme de colles - Semaine n° 16

du 22 au 26 janvier 2018

Chapitre 14 - Intégration d'une fonction sur un segment

Identique au programme de la semaine 15.

Chapitre 15 - Polynômes réels ou complexes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  - Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont définis en tant qu'applications polynômiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Si $k \in \mathbb{N}$, X^k désigne l'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto x^k \in \mathbb{K}$. Monôme. La notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est pas unique mais les coefficients de P sont uniquement déterminés.
  - Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$. Dérivée d'un polynôme.
  - Degré d'un polynôme. Degré et coefficient dominant de $P+Q$, λP, PQ, $P \circ Q$ et P' lorsque $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Notation $\mathbb{K}_n[X]$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Polynômes inversibles.
- Division euclidienne de polynômes
  - Théorème de la division euclidienne. Méthode algorithmique.
  - Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Notion de polynôme irréductible.
- Racines d'un polynôme et factorisation
  - a est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X-a)Q$.
  - Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.
    Un polynôme de $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P = 0$.
  - Factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes deux à deux.
  - Ordre de multiplicité d'une racine. Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$.
    Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est simple si et seulement si $P'(a) \neq 0$.
  - Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
  - Si $a \in \mathbb{C}[X]$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{a}$ est une racine de P de même ordre de multiplicité que a. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif).

Conformément au programme, aucune démonstration n'est exigible des étudiants pour ces deux chapitres. Les questions de cours pourront porter sur la restitution d'énoncés de propositions/théorèmes (*par exemple les différentes propriétés des intégrales, la formule d'intégration par parties, de changement de variable, convergence de sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue*[1]*, différents critères sur les racines de polynômes, la factorisation de polynômes, etc.*) ou encore un ou plusieurs exemples vus en cours parmi la liste suivante :

- Calcul de $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{Arctan}(t)\,dt$ avec une intégration par parties.
- Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ avec le changement de variable $t = \sin(x)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \ln(2)\right| \leqslant \frac{1}{2n}$.
- Factorisation de X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Prévisions pour la semaine 17 : chapitre 15, chapitre 16 (Systèmes linéaires) et début du chapitre 17 (Matrices).

1. De plus, si f est de classe C^1 alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,b]} |f'|$.