

Programme de colles - Semaine n° 15

du 15 novembre au 19 janvier 2018

Chapitre 13 - Dérivation d'une fonction réelle à valeurs réelles

Identique au programme de la semaine 14.

Chapitre 14 - Intégration d'une fonction sur un segment

- Primitives d'une fonction sur un intervalle
 - Unicité à une constante près. Unicité de la primitive s'annulant en un certain point.
 - Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
 - Primitives usuelles.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment
 - Définition en tant que différence des primitives de la fonction en chaque borne.
Notation $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
 - Relation de Chasles. Linéarité. Positivité (et cas d'une intégrale nulle). Croissance.
Inégalité de la moyenne. Inégalité triangulaire.
 - Plan d'étude d'une fonction définie par une intégrale.
 - Extension au cas des fonctions continues par morceaux.
- Intégration par parties.
- Changement de variables
 - Conformément au programme, tout changement de variable non affine devra être indiqué.
 - Intégrales de fonctions paires et impaires sur un segment centré en 0.
- Sommes de Riemann à pas constants
 - Définition des sommes de Riemann à gauche et à droite.
 - Convergence des sommes de Riemann dans le cas des fonctions continues.
Vitesse de convergence dans le cas C^1 .
 - Méthode des rectangles : interprétation géométrique en terme d'aire.

Conformément au programme, aucune démonstration n'est exigible des étudiants pour ces deux chapitres. Les questions de cours pourront porter sur la restitution d'énoncés de propositions/théorèmes (*par exemple le théorème de Rolle, des accroissements finis, les différents propriétés des intégrales, la formule d'intégration par parties, de changement de variable, etc.*). L'examineur pourra aussi demander la définition des sommes de Riemann à pas constants à gauche et à droite accompagnée du théorème de convergence dans le cas d'une fonction continue¹ (sans démonstration). Enfin l'examineur pourra aussi demander la restitution d'un ou plusieurs exemples vus en cours parmi la liste suivante :

- La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur \mathbb{R} mais n'est pas de classe C^1 .

On pourra utiliser, sans le montrer, le fait que \cos n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

- Calcul de $\int_0^1 t \operatorname{Arctan}(t) dt$ avec une intégration par parties.
- Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ avec le changement de variable $t = \sin(x)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \ln(2) \right| \leq \frac{1}{2n}$.

Prévisions pour la semaine 16 : chapitre 14 et chapitre 15 (Polynômes).

1. Par ailleurs, si f est de classe C^1 alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,b]} |f'|$.