
Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 16 Décembre 2008.

barème indicatif: 4, 6, 6, 4

Exercice 1. Donner le degré de la forme α et calculer $d\alpha$ pour :

1) $\alpha = (2x_1 \sin(x_1 + x_2) + x_1^2 \cos(x_1 + x_2) - x_3^2) dx_1 + x_1^2 \cos(x_1 + x_2) dx_2 - 2x_1 x_3 dx_3$

2) $\alpha = 2x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_2 + \sin(x_1 x_2) dx_2 \wedge dx_3.$

Exercice 2. Soit α la 1-forme dans \mathbf{R}^2 :

$$\alpha = (x_1 + 1)x_2 dx_1 + x_1(x_2 + 1) dx_2.$$

Soit D le domaine dans \mathbf{R}^2 défini par :

$$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

et γ le bord de D orienté par D (Voir Fig. 1).

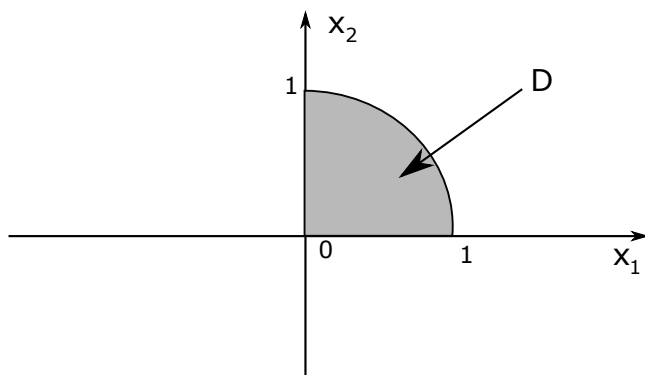


FIGURE 1 – Le domaine D

1) Calculer

$$\int_{\gamma} \alpha.$$

2) Calculer :

$$\iint_D (x_2 - x_1) dx_1 dx_2.$$

Exercice 3. On considère dans \mathbf{R}^3 la sphère unité :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

que l'on oriente par la normale extérieure (voir Fig. 2). On considère la paramétrisation de S

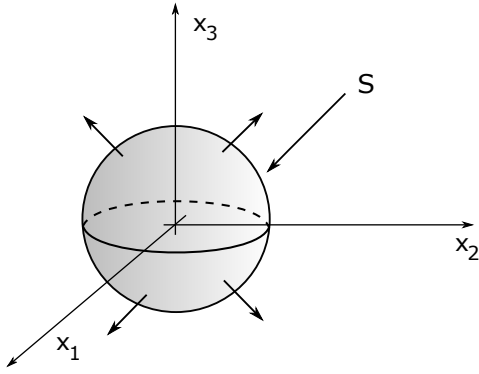


FIGURE 2 – La sphère S

donnée par :

$$[0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\phi, \theta) \mapsto x(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

1) Calculer le vecteur normal unitaire $\vec{\nu}$ au point $x(\phi, \theta)$ et vérifier que la paramétrisation précédente est compatible avec l'orientation de S .

2) Soit α la 2-forme :

$$\alpha = (x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_3^3) \, dx_1 \wedge dx_2.$$

Calculer l'intégrale :

$$\iint_S \alpha.$$

3) Soit U la boule unité :

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Donner sans calcul la valeur de l'intégrale :

$$\iiint_U (x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2) \, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Exercice 4. On considère la surface $S \subset \mathbf{R}^3$ définie par :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'aire de la surface S .