Corrigé du partiel Maths 255 S3PC

Le Vendredi 6 Novembre 2009.

Exercice 1. On calcule les dérivées partielles en appliquant les règles habituelles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) &= yf(x+y) + xyf'(x+y),\\
\tfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) &= xf(x+y) + xyf'(x+y),\\
\tfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) &= yf'(xy)\mathrm{e}^{xy} + yf(xy)\mathrm{e}^{xy},\\
\tfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) &= xf'(xy)\mathrm{e}^{xy} + xf(xy)\mathrm{e}^{xy},\\
\tfrac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) &= 2xf'(x^2+y^2),\\
\tfrac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) &= 2yf'(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Exercice 2.

Cas de la fonction F_1 : on calcule les dérivées partielles de F_1 :

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) &= \mathrm{e}^{xy} + y(x-y)\mathrm{e}^{xy},\\
\tfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) &= -\mathrm{e}^{xy} + x(x-y)\mathrm{e}^{xy}.
\end{aligned}$$

Le point $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{xy}(1+y(x-y)) = 0 \\ \mathrm{e}^{xy}(-1+x(x-y)) = 0 \end{array}\right. ,$$

c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - xy = 1 \\ x^2 - xy = 1 \end{array}\right. .$$

En faisant la différence des deux lignes on obtient que $x^2 = y^2$, c'est à dire que $x = y$ ou $x = -y$. Si $x = y$ les deux équations donnent $x^2 - x^2 = 1$ ce qui est impossible. Si $x = -y$ les deux équations donnent $2x^2 = 1$ soit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve donc les deux points critiques

$$M_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ M_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Pour déterminer la nature des points critiques, on calcule la matrice Hessienne. On a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x,y) = 2y\mathrm{e}^{xy} + y^2(x-y)\mathrm{e}^{xy},\ \tfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}(x,y) = 2(x-y)\mathrm{e}^{xy} + xy(x-y)\mathrm{e}^{xy},\\
&\tfrac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}(x,y) = -2x\mathrm{e}^{xy} + y^2(x-y)\mathrm{e}^{xy}.
\end{aligned}$$

Au point M_0 la matrice Hessienne est donc égale à :

$$A = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2^{-1/2} - 2^{1/2} & 2^{3/2} - 2^{-1/2} \\ 2^{3/2} - 2^{-1/2} & 2^{-1/2} - 2^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut :

$$(2^{-1/2} - 2^{1/2})^2 - (2^{3/2} - 2^{-1/2})^2 = (1/2 + 2 - 2) - (8 + 1/2 - 4) = -4.$$

La matrice Hessienne a donc deux valeurs propres non nulles de signe contraire, M_0 est un point selle.

Au point M_1 la matrice Hessienne est égale à $-A$, le point M_1 est donc aussi un point selle.

Cas de la fonction F_2 : on obtient :

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \cos x,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2y - 2.$$

L'équation donnant les points critiques est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{array} \right. ,$$

c'est à dire qu'on obtient les points critiques $M_k = (\pi/2 + k\pi, 1)$, pour $k \in \mathbb{N}$. La matrice Hessienne est

$$H_{F_2}(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

qui vaut au point M_k :

$$A_k = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de A_k est $2(-1)^{k+1}$ qui vaut -2 si k est pair, $+2$ si k est impair. La trace est $2 + (-1)^{k+1}$, qui vaut 1 si k est pair, 3 si k est impair. On en déduit que M_k est un point selle si k est pair, et un minimum local si k est impair.

Exercice 3. On calcule

$$\dot{x}_1(t) = -\sin t(1 + \cos t) - \sin t \cos t = -\sin t - \sin 2t,$$
$$\dot{x}_2(t) = \cos t(1 + \cos t) - \sin^2 t = \cos t + \cos 2t,$$

puis

$$\|\dot{x}(t)\|^2 = (\sin t + \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2 = 2 + 2\cos t \cos 2t + 2 \sin t \sin 2t = 2 + 2\cos t.$$

On a donc

$$l(\gamma) = \int_0^\pi \|\dot{x}(t)\| \; dt = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos t} \; dt.$$

En utilisant la relation $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, on obtient que

$$l(\gamma) = 2\int_0^\pi |\cos(t/2)| \; dt = 4\int_0^{\pi/2} |\cos s| \; ds = 4\int_0^{\pi/2} \cos s \; ds = 4.$$