Corrigé du partiel de Maths 255 du 26 Octobre 2010.

Exercice 1 :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\ell_4 \to \ell_4+\ell_1}{=} \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_4$

$$= (a-b) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & b & 0 \\ b+a & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} =$$

(dev/ C_1) $\qquad C_1 \to C_1+C_2 \qquad \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1$

$$(a-b) \begin{vmatrix} a+b & b & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b)^2.$$

Exercice 2 :

1) On a $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$.

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{r} f'(r)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r} f'(r) - \dfrac{x^2}{r^3} f'(r) + \dfrac{x^2}{r^2} f''(r)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{r^3} f'(r) + \frac{xy}{r^2} f''(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} f'(r) - \frac{y}{r^3} f(r) + \frac{y^2}{r^2} f''(r).$$

Donc : $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$

$$\frac{x^2}{r} f'(r) - \frac{x^4}{r^3} f'(r) + \frac{x^4}{r^2} f''(r) + - \frac{2x^2y^2}{r^3} f'(r) + \frac{2x^2y^2}{r^2} f''(r)$$

$$+ \frac{y^2}{r} f'(r) - \frac{y^4}{r^3} f'(r) + \frac{y^4}{r^2} f''(r)$$

$$= \frac{(x^2+y^2)}{r} f'(r) - \frac{(x^2+y^2)^2}{r^3} f'(r) + \frac{(x^2+y^2)^2}{r^2} f''(r)$$

$$= r^2 f''(r).$$

Exercice 3. On calcule les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda 1) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\ell_2 \to \ell_2+\ell_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3 \to C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{dév}/C_1}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((1-\lambda)(1+\lambda)-2\right)+2 = (2-\lambda)(1-\lambda^2-2)+2 =$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1)+2 = \lambda^3-2\lambda^2+\lambda = \lambda(\lambda-1)^2.$$

A a deux valeurs propres 0 et 1.

Espace propre pour $\lambda=0$.

On résout $A\vec{u}=0$ $\quad \vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-x \\ 2x-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-x. \end{cases}$$

L'espace propre est de dimension 1, un vecteur propre est $\vec{f_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Espace propre pour $\lambda=1$ $\quad$ On résout $A\vec{u}=\vec{u}$

~~z~~

$$\begin{cases} 2x+y-z=x \\ -x+z=y \\ x+y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z. \\ \\ \end{cases}$$ L'espace propre est

de dimension 2, une base de l'espace propre est donnée par

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A est diagonalisable car $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

La solution générale du système est

$$\vec{x}(t) = \alpha_1 e^{0t}\vec{f}_1 + \alpha_2 e^{t}\vec{f}_2 + \alpha_3 e^{t}\vec{f}_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

donc : $\begin{cases} x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^t \\ y(t) = -\alpha_1 + \alpha_3 e^t \\ z(t) = \alpha_1 + (\alpha_2+\alpha_3)e^t \end{cases}$.

Exercice 4. On calcule :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x^3 - y^2 + 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy.$$

On résout le système $\begin{cases} -4x^3 - y^2 + 4 = 0 \\ -2xy = 0. \end{cases}$

La 2ème équ. donne $x=0$ ou $y=0$.

si $x=0$ on obtient dans la première $y^2=4$, $y=\pm 2$

si $y=0$ ———————— $4x^3=4$, $x=1$.

On a 3 points critiques :

~~$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$~~ ~~$B = $~~ $A=(0,2)$, $B=(0,-2)$ $C=(1,0)$.

On calcule la matrice des dérivées secondes :

$$M = \begin{bmatrix} -12x^2 & -2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}$$

– Nature du point A :

si $(x,y) = (0,2)$ $\quad M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Tr}\, M = 0 \quad \det M = -16.$

M a 2 valeurs propres de signes contraires, A est un point selle.

– · Nature du point B :

si $(x,y) = (0,-2)$ $\quad M = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det M = -16,$

B est un point selle.

– Nature du point C :

$(x,y) = (1,0)$ $\quad M = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \det M = 24 \quad \mathrm{Tr}\, M = -14.$

M a 2 valeurs propres négatives C est un maximum local.