Controle de Mathématiques (S3PC) n° 2

Durée 1 heure 30. Documents et calculatrices interdits

.

Exercice 1. Soit γ l'arc orienté dans $\mathbf{R}^2$ défini par le paramétrage :

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \cos t)).$$

1) Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on note par $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi]$ les coordonnées polaires de (x_1, x_2). On rappelle que $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ et $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Montrer que γ est égal à la courbe C définie en coordonnées polaires par :

$$C = \{(x_1, x_2) \mid r = 1 + \cos\theta\}.$$

2) Soit $\vec{X}(x)$ le champ de vecteurs défini dans $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ par :

$$\vec{X}(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}).$$

Calculer la circulation de $\vec{X}$ le long de γ.

Exercice 2. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface paramétrée définie par le paramétrage :

$$[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \ni (t, s) \mapsto x(t, s) = (t\cos s, t\sin s, 1 - \frac{t^2}{2}).$$

1) Montrer que S est incluse dans la calotte parabolique :

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | \ 0 \leq x_3 \leq 1,\ x_3 = 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\}.$$

2) Calculer les vecteurs $\frac{\partial x(t,x)}{\partial t}$ et $\frac{\partial x(t,x)}{\partial s}$.

Donner la définition du vecteur normal unitaire $\vec{\nu}(t, s)$ au point $x(t, s)$ de Σ et le calculer.

3) Donner la définition de l'élément d'aire d^2S en fonction de $dtds$.

Calculer l'aire de la surface S :

$$\text{Aire}(S) = \int\int_{\Sigma} d^2S.$$