
Contrôle de Mathématiques (S3PC) n° 2

Durée 1 heure 30. Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soit γ l'arc orienté dans \mathbf{R}^2 défini par le paramétrage :

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \cos t)).$$

1) Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on note par $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ les coordonnées polaires de (x_1, x_2) . On rappelle que $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ et $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Montrer que γ est égal à la courbe C définie en coordonnées polaires par :

$$C = \{(x_1, x_2) \mid r = 1 + \cos \theta\}.$$

2) Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine entouré par C . Calculer l'aire de D .

Indication : on pourra écrire le domaine D en coordonnées polaires.

Exercice 2. Soit $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ la surface paramétrée définie par le paramétrage :

$$[0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \ni (t, s) \mapsto x(t, s) = (t \cos s, t \sin s, 1 - \frac{t^2}{2}).$$

1) Montrer que Σ est incluse dans la calotte parabolique :

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x_3 \leq 1, x_3 = 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\}.$$

2) Calculer les vecteurs $\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}$ et $\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}$.

Donner la définition du vecteur normal unitaire $\vec{\nu}(t, s)$ au point $x(t, s)$ de Σ et le calculer.

3) Donner la définition de l'élément d'aire d^2S en fonction de $dt ds$.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction :

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Calculer l'intégrale :

$$I = \int \int_{\Sigma} f(x_1, x_2) d^2S,$$