Controle de Mathématiques (S3PC) n° 2

Durée 1 heure . Documents et calculatrices interdits

7 Décembre 2009

Exercice 1. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine :

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2+y^2 \geq 1\}.$$

1) Tracer le domaine D.

2) Calculer l'intégrale :

$$I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Indication : on rappelle que $\int \log t\ \mathrm{d}t = t\log t - t$.

Exercice 2. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface donnée par l'équation :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ z = x^2+y^2\},$$

orientée comme sur le dessin. (voir Fig. 1).

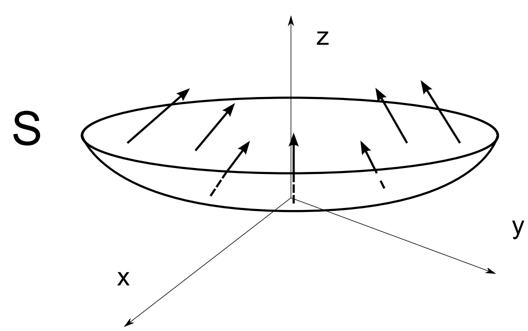

Figure 1 – la surface orientée S.

1) Montrer que le paramétrage :

$$D = [0,1] \times [0,2\pi] \in (t,s) \mapsto x(t,s) = (t\cos s, t\sin s, t^2) \in \mathbf{R}^3$$

est un paramétrage de S compatible avec l'orientation.

2) Soit $\vec{F}(x,y,z)$ le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers la surface S :

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}\ \mathrm{d}^2S.$$