Feuille d'exercices n° 1 Math 152

Exercice 1. Soit C la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin^3 t + 3\cos t \\ y(t) = 2\cos^3 t - 3\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi].$$

1) Déterminer les points de C où la tangente est horizontale.

2) Déterminer les points de C où la tangente est verticale.

3) Déterminer les points singuliers de C.

4) Vérifier que $x(t + \pi/2) = y(t)$, $y(t + \pi/2) = -x(t)$ et expliquer comment obtenir la partie C_2 de la courbe obtenue pour $t \in [\pi/2, \pi]$ à partir de la partie C_1 obtenue pour $t \in 0, \pi/2$.

5) Tracer les tableaux de variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, \pi/2]$ puis tracer la courbe C.

Exercice 2. Soit C la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t). \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

La courbe C est la trajectoire décrite par un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur une droite.

1) On pose $M(t) = (x(t), y(t))$. Montrer que $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{u}$, où $\vec{u} = (2\pi R, 0)$, et en déduire qu'il suffit d'étudier la partie de la courbe C correspondant à $t \in [0, 2\pi]$.

2) Tracer les tableaux de variation de $x(t)$ et $y(t)$ puis tracer la courbe C pour $t \in [0, 2\pi]$.

3) Calculer la longueur de l'arc de la courbe C pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3. Soit C la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin t. \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

pour une constante $\alpha > 0$.

Calculer la longueur de l'arc de la courbe C obtenu pour $t \in [0, T_0]$.

Exercice 4. Soit C la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t}{t+1} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1) Donner le domaine de définition de $x(t)$ et $y(t)$.

2) Déterminer les asymptotes à la courbe C.

3) Tracer les tableaux de variation de $x(t)$ et $y(t)$ puis tracer la courbe C.

Exercice 5. Soit C la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $t \in [-\pi, \pi]$, puis à $t \in [0, \pi]$ et enfin à $t \in [0, \pi/2]$ en recherchant les symétries de la courbe C.

2) Tracer la courbe C pour $t \in [0, \pi/2]$ puis la courbe C en entier.

3) Montrer que la courbe C est incluse dans la parabole d'équation $x = 1 - 2y^2$.