Examen de Math 152

du 17/12/2010. Corrigé

Exercice 1

1) Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodiques, on se ramène à $t \in [-\pi, \pi]$. On a $x(t) = x(-t)$, $y(-t) = -y(t)$. On se ramène à $t \in [0, \pi]$ puis on complète la courbe par symétrie par rapport à l'axe Ox.

2) On a : $\dot{x}(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = -2(\sin t + 2\sin t\cos t)$

$$= -2\sin t\,(1 + 2\cos t).$$

De même : $\dot{y}(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 2(\cos t + 2\cos^2 t - 1)$.

On a donc $\dot{x}(t) = 0 \iff \sin t = 0$ ou $\cos t = -1/2$

Pour $t \in [0, \pi]$, on obtient les solutions : $t = 0$, $t = \pi$ et $t = 2\pi/3$.

$(\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2)$.

De même $\dot{y}(t) = 0 \iff 2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0$.

On cherche les racines du trinôme $2X^2 + X - 1$. On a :

$\Delta = 9$, les racines sont : $-\dfrac{1 \pm 3}{4}$ soit $\lambda = -1$ et $\lambda = 1/2$.

On cherche les $t \in [0, \pi]$ tels que $\cos t = -1$, soit $t = \pi$

et $\cos t = 1/2$ soit $t = \pi/3$.

Conclusion : la tangente est horizontale $(\dot{y}(t) = 0)$ si $t = \pi$ ou $t = \pi/3$ donc aux points $M = (-1, 0)$ et $M = (1/2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

la tangente est verticale $(\dot{x}(t) = 0)$ si $t = 0$, π ou $2\pi/3$ donc aux points $M = (3, 0)$, $M = (-1, 0)$ et $M = (-3/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Le point $(-1, 0)$ est point critique $(\dot{x}(\pi) = \dot{y}(\pi) = 0)$.

3) On pose $t = \pi + s$. $x(\pi+s) = 2\cos(\pi+s) + \cos(2\pi+2s)$

$$= -2\cos s + \cos 2s$$

$$y(\pi+s) = -2\sin s + \sin 2s.$$

D.L de ~~cos~~ $x(\pi+s)$ en $s=0$

$$\cos s = 1 - s^2/2 + s^2\varepsilon(s)$$

$$x(\pi+s) = -2 + s^2 + 1 - 2s^2 + s^2\varepsilon(s)$$
$$= -1 - s^2 + s^2\varepsilon(s).$$

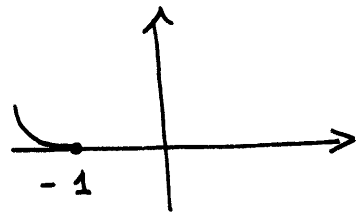
D.L. de $y(\pi+s)$ en $s=0$

$$\sin s = s - \frac{s^3}{6} + s^3\varepsilon(s)$$

$$y(\pi+s) = -2s + s^3/3 + 2s - \frac{8s^3}{6} + s^3\varepsilon(s)$$
$$= -s^3 + s^3\varepsilon(s).$$

L'allure de la courbe au voisinage du point $(-1,0)$ est identique à la courbe paramétrée : $x(s) = -1-s^2$, $y(s) = -s^3$ pour $s<0$, s proche de 0.

On obtient le dessin:

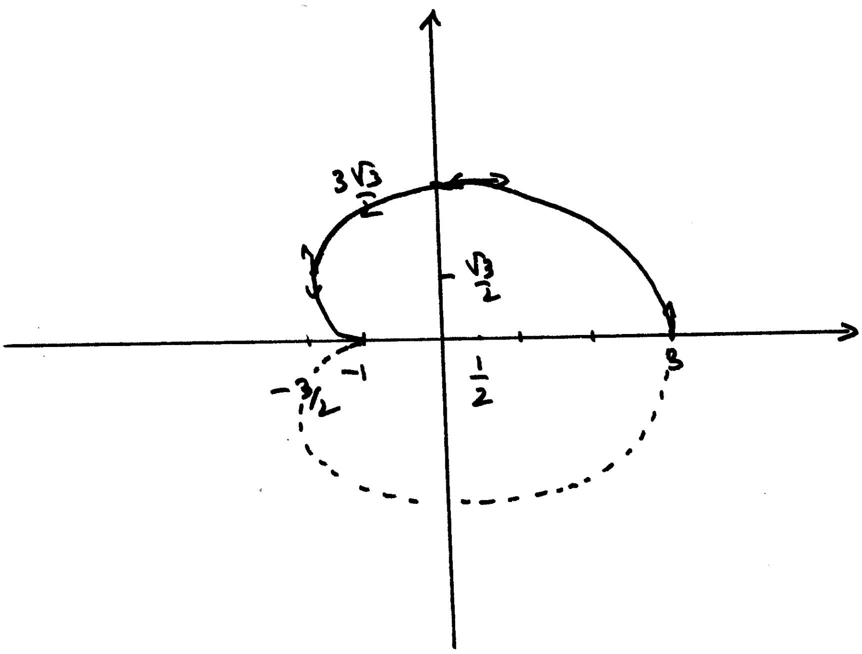


Comme : $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{y(s)-y(0)}{x(s)-x(0)} = 0$ la tangente est horizontale.

4) Tableau de variation

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$\dot{x}(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$x(t)$	3	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
$\dot{y}(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Tracé



Exercice 2.

$x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodiques, on étudie la courbe pour $t \in [-\pi, \pi]$.

$x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, on étudie sur $[0, \pi]$ puis on complète par symétrie par rapport à Ox.

On a : $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = -y(t)$, on étudie la courbe sur $[0, \pi/2]$ puis on complète par symétrie par rapport à O.

Tableau de variation

$\dot{x}(t) = -3\sin 3t$,

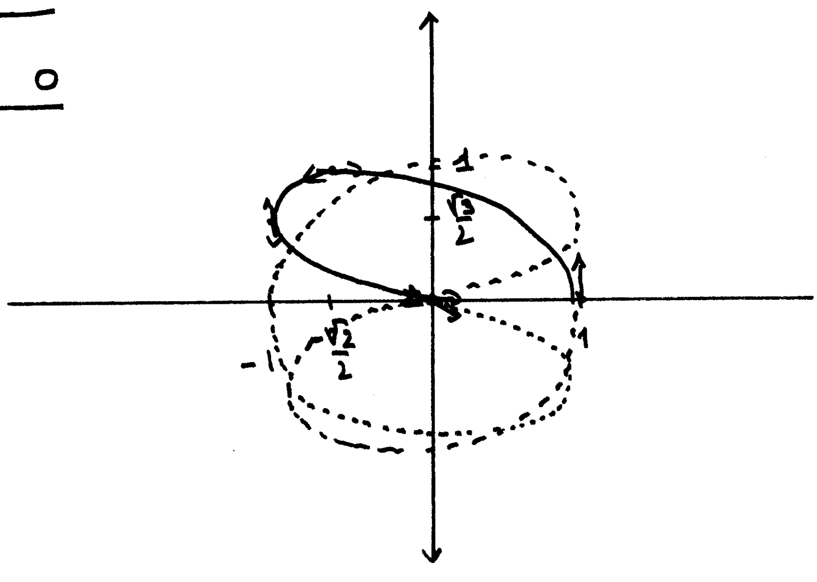
$\dot{x}(t) = 0$ pour $t = 0$ ou $t = \pi/3$

$\dot{y}(t) = 2\cos 2t$

$\dot{y}(t) = 0$ pour $t = \pi/4$

t	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
$\dot{x}(t)$	0	$-$	$-$		0	$+$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\dot{y}(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

Tracé :



Exercice 3.

1) on a $\dot{r}(\theta) = -2\sin\theta$.

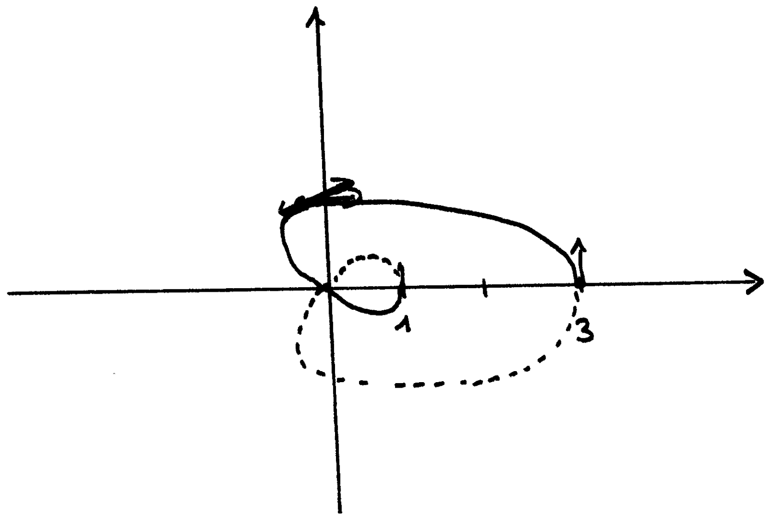
On étudie pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. Comme $r(-\theta) = r(\theta)$, on se ramène à $\theta \in [0, \pi]$, puis on complète par symétrie par rapport à Ox.

Tableau de variation :

θ	0	$\pi/2$	π
$\dot{r}(\theta)$	0	$-$	0
$r(\theta)$	3	$\searrow 1 \searrow$	-1

$r(\pi/2) = 1$

$r(\theta) = 0$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$



2) la longueur totale de la courbe est deux fois celle de la courbe pour $\theta \in [0, \pi]$.

on a donc

$$L = 2 \int_0^{\pi} \left(r^2(\theta) + \dot{r}^2(\theta)\right)^{1/2} d\theta$$