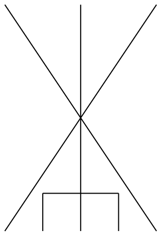
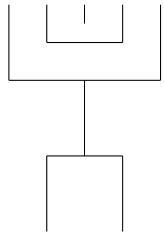
ALGÈBRES DE PARTITIONS ET GROUPES QUANTIQUES LIBRES

AMAURY FRESLON

Résumé. Le but de cet exposé est de présenter les résultats de [Fre14b]. Ces résultats reposent essentiellement sur le travail [FW14] réalisé en collaboration avec M. Weber ainsi que sur [Fre14a]. Nous avons choisie d'adopter le point de vue des catégories afin de montrer la généralité des constructions, même si les résultats essentiels sont restreints au cadre des groupes quantiques compacts.

1. Algèbres de partitions abstraites

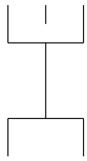
1.1. Les partitions coloriées et leurs algèbres. Nous allons nous intéresser à l'utilisation de la combinatoire des *partitions*. Par ce terme, nous désignons une partition d'un ensemble fini, que nous supposerons toujours être $\{1, \ldots, n\}$ pour un certain entier n. Une telle partition peut être représentée graphiquement par une rangée de n points munie de lignes connectant les points appartenant au même bloc de la partition. Si k, l sont deux entiers tels que $n = k + l$, on peut modifier cette représentation en déplaçant les l derniers points sur une deuxième rangée, inférieure à la première. Le résultat est appelé *diagramme de partition*. Voici deux exemples :

$p_1 =$  $p_2 =$ 

L'ensemble de tous les diagrammes de partitions avec k points dans la rangée supérieure et l points dans la rangée inférieure sera noté $P(k, l)$. L'intérêt des diagrammes de partitions est qu'ils permettent une description simple de certaines opérations sur les partitions. La plus importante de ces opérations est la composition, que nous décrivons maintenant.

Définition 1.1. Soient $p \in P(k, l)$ et $q \in P(m, k)$ deux partitions. Leur composition (ou concaténation verticale) est la partition obtenue en plaçant p sous q et en connectant les points correspondants. Cette opération peut produire des "boucles" au milieu du diagramme. Celles-ci sont supprimées et leur nombre est noté $\mathrm{rl}(p, q)$.

À titre d'exemple, la concaténation des partitions p_1 et p_2 précédentes donne (avec $\mathrm{rl}(p_2, p_1) = 1$)

$p_2p_1 =$ 

Cette opération n'a de sens que si le nombre de points inférieurs de q est égale au nombre de points supérieurs de p. En se restreignant à l'ensemble $P(k,k)$ pour un entier k, la composition est toujours possible. Plus généralement, si $\mathcal{C}(k,k)$ est un sous-ensemble de $P(k,k)$ stable par composition, on peut, en utilisant la composition, produire une algèbre.

Définition 1.2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $\theta \in \mathbb{K}^{\times}$ et soit $\mathcal{C}(k,k)$ un sous-ensemble de $P(k,k)$ stable par composition. La $\mathbb{K}$-*algèbre de partitions de type* $\mathcal{C}(k,k)$ *et de paramètre* θ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel libre $A(\mathcal{C}(k,k),\theta)$ engendré par $\mathcal{C}(k,k)$ muni du produit

$$p.q = \theta^{\mathrm{rl}(p,q)}pq.$$

Dans la suite, nous nous intéresserons à une famille un peu plus larges d'objets, les *partitions coloriées*.

Définition 1.3. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fixe (que l'on appellera ensemble de couleurs). Une partition $\mathcal{A}$-coloriée est une partition p avec la donnée supplémentaire d'un élément de $\mathcal{A}$ associé à chaque point de p.

Soit p une partition coloriée. Les couleurs des points supérieurs, lues de gauche à droite, forment un mot w sur $\mathcal{A}$ appelé *mot supérieur* de p. De même, les couleurs des points inférieurs, lues également de gauche à droite, forment le *mot inférieur* w' de p. On note $P^{\mathcal{A}}(w,w')$ l'ensemble des partitions $\mathcal{A}$-coloriées dont le mot supérieur est w et dont le mot inférieur est w'. La composition des partitions s'étend à ce cadre avec la restriction suivante : deux partitions p et q ne peuvent être composées (dans cet ordre) que si le mot inférieur de q est égal au mot supérieur de p. On a alors à nouveau une notion d'algèbre de partitions.

Définition 1.4. Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $\theta \in \mathbb{K}^{\times}$, soit $\mathcal{A}$ un ensemble de couleurs, soit w un mot sur $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(w,w)$ un sous-ensemble de $P^{\mathcal{A}}(w,w)$ stable par composition. La $\mathbb{K}$-*algèbre de partitions de type* $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(w,w)$ *et de paramètre* θ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel libre $A(\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(w,w),\theta)$ engendré par $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(w,w)$ muni du produit

$$p.q = \theta^{\mathrm{rl}(p,q)}pq.$$

Suivant le choix du corps $\mathbb{K}$, les propriétés de l'algèbre $A(\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(w,w),\theta)$ (notamment la semi-simplicité) peuvent plus ou moins dépendre du paramètre θ. Dans la suite, nous nous placerons *toujours* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De plus, le paramètre θ sera *souvent* un entier positif.

1.2. Quelques exemples.

Nous allons maintenant donner quelques exemples d'algèbres de partitions. Ils sont intéressants dans la mesure où ils sont liés à la théorie des représentations de certains groupes de Lie compacts.

Exemple 1.5. Soit $P_2(k,k)$ l'ensemble de toutes les *partitions en paires*, c'est-à-dire des partitions dont tous les blocs sont de taille 2, avec k points sur chaque ligne. Si $\theta \in \mathbb{C}^{\times}$, l'algèbre $A(P_2(k,k),\theta)$ est l'*algèbre de Brauer* d'ordre k et de paramètre θ. R. Brauer a montré dans [Bra37] que si $V = \mathbb{C}^N$ est muni de la représentation matricielle naturelle du groupe orthogonal O_N, alors le commutant de la représentation $V^{\otimes k}$ est un quotient de $A(P_2(k,k),N)$.

Exemple 1.6. Soit $P(k,k)$ l'ensemble de toutes les partitions avec k points sur chaque ligne. Si $\theta \in \mathbb{C}^{\times}$, l'algèbre $A(P(k,k),\theta)$ est l'*algèbre de partitions* d'ordre k et de paramètre θ. Elle a été introduite simultanément mais indépendamment par V.F.R. Jones dans [Jon93] et P. Martin dans [Mar94] pour étudier des modèles de physique statistique. Ils ont par ailleurs montré que si $V = \mathbb{C}^N$ est muni de la représentation matricielle naturelle du groupe symétrique S_N, alors le commutant de la représentation $V^{\otimes k}$ est un quotient de $A(P(k,k),N)$.

Exemple 1.7. Soit G un groupe fini et soit $P_G(k,k)$ l'ensemble de toutes les partitions G-coloriées avec k points sur chaque ligne et telles que, dans chaque bloc, le produit des couleurs de la partie supérieure (de gauche à droite) est égal au produit de couleurs de la partie inférieure (de gauche à droite également). Si $\theta \in \mathbb{C}^\times$, l'algèbre $A(P_G(k,k),\theta)$ est l'*algèbre de partitions G-coloriées*. A.J. Kennedy et M. Parvathi ont montré dans [KP04] que pour $\theta = N$, cette algèbre se quotiente sur le commutant d'une représentation tensorielle du produit en couronne $G \wr S_N$.

Chacun des exemples précédents peut être repris en se restreignant aux *partitions non-croisées*. Il s'agit de partitions particulières qui seront fondamentales dans la suite.

Définition 1.8. Une partition p est dite croisée s'il existe quatre entiers k_1, k_2, k_3, k_4 tels que :
- k_1 et k_3 sont dans le même bloc.
- k_2 et k_4 sont dans le même bloc.
- k_1 et k_2 ne sont pas dans le même bloc.
- $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$.

Sinon, p est dite non-croisée.

On peut alors définir des ensembles de partitions NC_2, NC et NC_G en ne considérant dans les exemples précédents que les partitions non-croisées. Ces ensembles ne s'interprètent pas à l'aide de représentations tensorielles de groupes compacts. Toutefois, leur similitude avec les premiers exemples suggèrent qu'il existe une structure "de type groupe" plus générale à laquelle ils correspondent. Cette structure peut être approchée par le formalisme des catégories tensorielles.

1.3. **Le point de vue catégorique.** La construction des algèbres de partitions n'utilise que des partitions avec le même nombre de points sur chaque ligne. Si le nombre de points est différent, on ne peut plus composer les partitions. Toutefois, si le coloriage inférieur d'une partition est égal au coloriage supérieur d'une autre, la composition a un sens. Ceci suggère de voir les partitions comme des morphismes d'une catégorie naturelle. Nous dirons que deux partitions p et q sont composables si le coloriage inférieur de q est égal au coloriage supérieur de p.

Définition 1.9. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de couleurs et soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}(w,w'))_{w,w'}$ un ensemble de partitions tel que si $p, q \in \mathcal{C}$ sont composables, alors $pq \in \mathcal{C}$. Si $\theta \in \mathbb{C}^\times$, on définit la catégorie $\mathfrak{C}(\mathcal{C},\theta)$ de la façon suivante :
- Les objets de $\mathfrak{C}(\mathcal{C},\theta)$ sont les mots sur $\mathcal{A}$.
- Si w et w' sont deux mots sur $\mathcal{A}$, les morphismes dans $\mathfrak{C}(\mathcal{C},\theta)$ entre w et w' sont l'espace vectoriel libre engendré par $\mathcal{C}(w,w')$. De plus, si p et q sont deux partitions composables, leur composée est

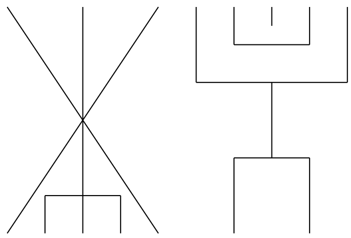
$$p \circ q = \theta^{\mathrm{rl}(p,q)} pq.$$

Cette définition est une simple réécriture. Pour enrichir la structure de la catégorie $\mathfrak{C}(\mathcal{C},\theta)$ et la rapprocher de celle des catégories de représentations de groupes il nous faut de nouvelles opérations sur les partitions. La structure tensorielle, par exemple, peut s'obtenir facilement.

Définition 1.10. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble, soit $p \in P^{\mathcal{A}}(w_1,w_2)$ et soit $q \in P^{\mathcal{A}}(w_3,w_4)$. La *concaténation horizontale* de p et q est la partition $p \otimes q \in P(w_1.w_3, w_2.w_4)$ obtenue en juxtaposant horizontalement p et q.

En utilisant les deux partitions p_1 et p_2 précédentes, on obtient par exemple

$$p_1 \otimes p_2 =$$



Munie de cette opération, $(\mathfrak{C}(\mathcal{C}, \theta), \otimes)$ devient une *catégorie tensorielle*, pour peu que $\mathcal{C}$ soit stable par $\otimes$.

Exemple 1.11. Considérons l'exemple le plus simple en oubliant momentanément les couleurs. Soit $P = (P(k,l))_{k,l \in \mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les partitions. Pour $\theta \in \mathbb{C}^{\times}$, la catégorie $\mathfrak{C}(P, \theta)$ a été introduite par P. Deligne dans [Del07]. Si $\theta = N \in \mathbb{N}$, on peut montrer que la complétion pseudo-abélienne de cette catégorie est la catégorie des représentations de dimension finies du groupe S_N. Cette remarque a conduit P. Deligne à appeler $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, \theta)$ la *catégorie des représentations de* S_θ, même quand θ n'est pas un entier.

La catégorie de représentations d'un groupe fini (ou compact) n'est pas simplement une catégorie tensorielle, elle possède également une dualité. Plus précisément, si U, V and W sont trois représentations d'un groupe compact, alors il existe un isomorphisme canonique (appelé *dualité de Frobenius*)

$$\mathrm{Hom}(U, V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}(\overline{V} \otimes U, W). \tag{1}$$

Pour comprendre comment exprimer cette dualité au niveau des partitions, prenons un exemple. Supposons qu'à chaque point d'une partition correspond une représentation, déterminée par sa couleur. L'isomorphisme de l'Équation (1) doit alors correspondre à une opération qui déplace le point inférieur le plus à gauche d'une partition jusqu'à la gauche du rang supérieur. De plus, la couleur du point en question doit être changée en la couleur de la représentation conjuguée. Cela nécessite une structure supplémentaire sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des couleurs.

Définition 1.12. Un ensemble de couleurs est un ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une involution $x \mapsto x^{-1}$.

La construction précédente se résume alors de la façon suivante : on effectue une rotation du point le plus à gauche du rang inférieur jusqu'à la gauche du rang supérieur en inversant sa couleur. Cette opération sera appelée une *rotation* de la partition. On peut également effectuer des rotations à droite.

Pour terminer, il nous faut introduire une dernière opération. Si l'on pense à nouveau à la catégorie des représentations finies d'un groupe compact, on peut, à équivalence près, toujours supposer que les représentations sont *unitaires*. Cela signifie que l'espace sur lequel elles agissent est un espace de Hilbert. On peut alors considérer l'opération sur les morphismes consistant à prendre l'opérateur adjoint. La traduction sur les partitions est assez simple :

Définition 1.13. Soit p une partition. On note p^* la partition obtenue à partir de p en effectuant une symétrie horizontale.

Remarque 1.14. Pour obtenir une structure analytique, il faut que l'opération $p \mapsto p^*$ induise une involution *antilinéaire* sur les espaces $\mathrm{Hom}(w, w)$. Ceci n'est possible que si $\theta \in \mathbb{R}$. C'est la raison pour laquelle les groupes compacts ainsi obtenus correspondent toujours à des déformations à paramètre réel de groupes de Lie compacts.

Nous pouvons maintenant résumer ces constructions en isolant les ensembles de partitions $\mathcal{C}$ pour lesquels la catégorie $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, \theta)$ possède la structure la plus riche possible. Pour une couleur $x \in \mathcal{A}$, on appelle *identité x-coloriée* la partition | avec la couleur x sur chaque point.

Définition 1.15. Une *catégorie de partitions $\mathcal{A}$-coloriées* (qui sera abrégé en catégorie de partitions) $\mathcal{C}$ est la donnée d'un ensemble de partitions $\mathcal{A}$-coloriées $\mathcal{C}(w,w')$ pour tous mots w et w' sur $\mathcal{A}$, stable par toutes les opérations précédentes et qui contient l'identité x-coloriée pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Il est donc possible d'associer à toute catégorie de partitions une catégorie dotée d'une structure algébrique riche. Nous allons maintenant tenter d'ajouter une structure analytique qui permettra de compléter le lien avec la théorie des représentations des groupes compacts.

2. Groupes quantiques de partitions

2.1. Réalisation concrète des catégories de partitions. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de partitions $\mathcal{A}$-coloriées et $\theta \in \mathbb{C}^{\times}$. Notre but est maintenant d'associer à chaque objet de la catégorie $\mathfrak{C}(\mathcal{C},\theta)$ un espace de Hilbert, de façon à ce que les morphismes deviennent des applications linéaires continues entre ces espaces. Une telle construction nécessite des conditions de compatibilités entre les différents espaces, qui sont résumées par la notion de *foncteur fibre unitaire*.

Définition 2.1. Un foncteur fibre unitaire sur une $*$-catégorie tensorielle avec dualité $\mathfrak{C}$ est la donnée d'un espace de Hilbert $H_{\varphi(x)}$ pour chaque objet x et d'applications linéaires

$$\varphi : \mathrm{Hom}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) \to \mathcal{B}(H_{\varphi(x_1)} \otimes \cdots \otimes H_{\varphi(x_n)}, H_{\varphi(y_1)} \otimes \cdots \otimes H_{\varphi(y_k)})$$

pour tout ensemble d'objets $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ telles que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{Id}) &= \mathrm{Id} \\ \varphi(S^*) &= \varphi(S)^* \\ \varphi(S \otimes T) &= \varphi(S) \otimes \varphi(T) \\ \varphi(S \circ T) &= \varphi(S) \circ \varphi(T) \end{aligned}$$

Avec cette structure additionnelle, nous pouvons maintenant reconstruire un objet "de type groupe" grâce à la dualité de Tannaka-Krein.

Théorème 2.2 (Tannaka-Krein-Woronowicz). *Soit $\mathfrak{C}$ une $*$-catégorie tensorielle avec dualité et soit $\mathcal{F}$ un foncteur fibre unitaire envoyant la représentation triviale sur $\mathbb{C}$. Il existe un groupe quantique compact, unique à isomorphisme près, dont la catégorie de représentations de dimension finie est isomorphe à $\mathcal{F}(\mathfrak{C})$.*

Malheureusement, il n'existe pas nécessairement de foncteur fibre unitaire pour une catégorie de partitions et un paramètre θ donnés. De plus, le caractère unitaire, c'est-à-dire le fait que les espaces vectoriels associés soient des espaces de Hilbert, impose des restrictions importantes. Par exemple, il existe sur la catégorie des représentations de dimension finie de $SU(2)$ de nombreux foncteurs fibres, mais le seul qui soit unitaire est celui engendré par la représentation fondamentale sur $\mathbb{C}^2$. Toutefois, il existe un moyen canonique de produire un foncteur fibre unitaire quand θ est un entier. Nous considérerons donc désormais le cas $\theta = N \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3. Soit N un entier et soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une base de $\mathbb{C}^N$. Pour toute partition $p \in P^{\mathcal{A}}(k,l)$, on définit une application linéaire

$$T_p : (\mathbb{C}^N)^{\otimes k} \mapsto (\mathbb{C}^N)^{\otimes l}$$

par la formule

$$T_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \sum_{j_1, \ldots, j_l = 1}^{n} \delta_p(i,j) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l},$$

où $\delta_p(i,j)$ est calculé de la façon suivante :

- On place les indices $i_1,\dots,i_k$ sur les points du rang supérieur de p, de gauche à droite.
- On place les indices $j_1,\dots,j_l$ sur les points du rang inférieur de p, de gauche à droite.
- Si tous les points d'un même bloc portent des indices égaux, $\delta_p(i,j)=1$. Autrement, $\delta_p(i,j)=0$.

On notera que les couleurs n'interviennent pas dans cette définition. Si on se fixe maintenant un espace de Hilbert V^x de dimension N pour chaque $x\in\mathcal{A}$, on peut définir un foncteur fibre unitaire $\mathcal{F}_N$ sur $\mathfrak{C}(\mathcal{C},N)$ de la façon suivante :

- Le mot $w=w_1\dots w_n$ est envoyé sur $V^{w_1}\otimes\dots V^{w_n}=V^{\otimes w}$.
- La partition $p\in\mathcal{C}(w,w')$ est envoyé sur $T_p\in\mathcal{B}(V^{\otimes w},V^{\otimes w'})$.

Définition 2.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de partitions et soit N un entier. Le *groupe quantique de partitions* associé est le groupe quantique $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ obtenu par dualité de Tannaka-Krein à partir de $\mathcal{F}_N(\mathfrak{C}(\mathcal{C},N))$.

2.2. **Exemples.** Nous donnons maintenant une liste d'exemples de groupes (quantiques) compacts produits par la construction précédente. Comme nous allons le voir, ils s'agit d'exemples fondamentaux en théorie des groupes (quantiques) compacts.

2.2.1. *Exemples classiques.* Les exemples classiques ont déjà été mentionnés précédemment. Nous pouvons maintenant en augmenter la liste.

- La catégorie de partitions P_2 contenant toutes les partitions en paires donne, via $\mathcal{F}_N$, le groupe orthogonal O_N.
- La catégorie de partitions P contenant toutes les partitions donne, via $\mathcal{F}_N$, le groupe symétrique S_N.
- Considérons l'ensemble de couleurs $\mathcal{A}=\{\circ,\bullet\}$ avec $\circ^{-1}=\bullet$ et soit $P_2^{\circ,\bullet}$ la catégorie des partitions en paires $\mathcal{A}$-coloriées telles :
  - Si la paire est sur une ligne, les couleurs sont différentes.
  - Si la paire est sur deux lignes, les couleurs sont les mêmes.

  Le groupe associé via $\mathcal{F}_N$ est le groupe unitaire U_N.
- Soit Γ un groupe discret et soit Λ une partie génératrice symétrique de Γ. Considérons l'ensemble de couleurs $\mathcal{A}=\Lambda$ où l'inverse est donné par l'inverse dans le groupe et soit P_Γ la catégorie des partitions $\mathcal{A}$-coloriées telles que dans chaque bloc, le produit des couleurs de la partie supérieure est égal au produit des couleurs de la partie inférieure. Le groupe associé via $\mathcal{F}_N$ est le produit en couronne $\widehat{\Gamma_{ab}}\wr S_N$, où $\widehat{\Gamma_{ab}}$ désigne le dual de Pontryagin de l'abélianisé de Γ (qui est un groupe abélien compact).

2.2.2. *Exemples quantiques.* Nous avons déjà remarqué qu'il était possible dans tous les exemples précédents de se retreindre aux partitions non-croisées. Le formalisme des groupes quantiques compacts permet alors de décrire concrètement ces objets. Il s'avère qu'il s'agit d'exemples bien connus de groupes quantiques compacts, qui peuvent être obtenus par un autre procédé, dit de "libération", que nous décrivons maintenant dans le cas unitaire.

Définition 2.5. Soit N un entier. On définit $\mathrm{Pol}(U_N^+)$ comme l'$*$-algèbre universelle engendrée par N^2 éléments $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ tels que

$$u^*u=\mathrm{Id}_{M_N(A)}=uu^* \text{ and } {}^tu^{*t}u=\mathrm{Id}_{M_N(A)}={}^tu^tu^*,$$

où $u^*=(u_{ji}^*)_{1\leqslant i,j\leqslant N}$.

On peut munir $\mathrm{Pol}(U_N^+)$ d'une structure de groupe quantique compact grâce au coproduit

$$\Delta(u_{ij})=\sum_{k=1}^N u_{ik}\otimes u_{kj}.$$

Définition 2.6. Le groupe quantique compact $(\mathrm{Pol}(U_N^+), \Delta)$ est appelé le *groupe quantique unitaire*.

Remarquons que l'abélianisation de $\mathrm{Pol}(U_N^+)$ munie du coproduit induit est le groupe unitaire U_N. En d'autres termes, U_N est le plus grand sous-groupe compact classique de U_N^+. Des constructions similaires existent pour O_N et S_N, et les groupes quantiques obtenus sont les versions non-croisées des trois premiers exemples de la section précédente :

- Le groupe quantique associé à la catégorie de partitions $NC_2^{\circ,\bullet}$ via $\mathcal{F}_N$ est le groupe quantique unitaire U_N^+ défini ci-dessus.
- Soit $\mathrm{Pol}(O_N^+)$ le quotient de $\mathrm{Pol}(U_N^+)$ par les relations $u_{ij}^* = u_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant N$. Alors, le groupe quantique associé à la catégorie de partitions NC_2 via $\mathcal{F}_N$ est le groupe quantique orthogonal $O_N^+ = (\mathrm{Pol}(O_N^+), \Delta)$, où Δ est le coproduit induit sur le quotient.
- Soit $\mathrm{Pol}(S_N^+)$ le quotient de $\mathrm{Pol}(O_N^+)$ par les relations $u_{ij}^2 = u_{ij}$ et
$$\sum_{k=1}^{N} u_{ik} = 1 = \sum_{k=1}^{N} u_{kj}$$
pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant N$. Alors, le groupe quantique associé à la catégorie de partitions NC via $\mathcal{F}_N$ est le groupe quantique de permutations $S_N^+ = (\mathrm{Pol}(S_N^+), \Delta)$, où Δ est le coproduit induit sur le quotient.

Le dernier exemple est plus complexe. En effet, le produit en couronne $\widehat{\Gamma} \wr S_N$ ne s'écrit pas naturellement comme un sous-groupe de U_N (qui donnerait alors un quotient au niveau des $*$-algèbres associées). Toutefois, l'analogie avec le cas classique subsiste puisque F. Lemeux a montré dans [Lem14] que le groupe quantique compact associé à la catégorie de partitions NC_Γ via $\mathcal{F}_N$ est le *produit en couronne libre* $\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$ introduit par J. Bichon dans [Bic04].

Définition 2.7. Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique compact, soit $N \in \mathbb{N}$ et soit v la représentation fondamentale du groupe quantique de permutations S_N^+. Soit A le quotient de la C*-algèbre $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})^{*N} * \mathrm{Pol}(S_N^+)$ par les relations
$$\nu_k(x)u_{kj} = u_{kj}\nu_k(x)$$
pour $1 \leqslant j,k \leqslant N$, où $\nu_k : \mathrm{Pol}(\mathbb{G}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{G})^{*N} * \mathrm{Pol}(S_N^+)$ est l'inclusion du k-ième facteur. Le produit en couronne libre de $\mathbb{G}$ par S_N^+ est le groupe quantique compact (A, Δ) où Δ est le coproduit défini, pour $1 \leqslant i,j \leqslant k$, par
$$\begin{cases} \Delta(x_{ij}) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_{ik} \otimes x_{kj} \\ \Delta(\nu_i(x)) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (\nu_i \otimes \nu_k) \circ \Delta(x)(x_{ik} \otimes 1) \end{cases}$$

Notons que contrairement au cas classique, cette construction fonctionne pour tout groupe discret Γ, même non-abélien.

3. Qu'est-ce qu'un groupes quantique libre ?

3.1. **Anneaux de fusion et partitions non-croisées.** Les groupes quantiques de la sous-section 2.2.2 sont souvent appelés "groupes quantiques libres". Il y a trois raisons à cela :

- Ils sont obtenus en "libérant" les relations (i.e. en supprimant les relations de commutation) définissants certains groupes matriciels compacts sans modifier le coproduit. Cela a pour conséquence immédiate que le groupe compact d'origine est le plus grand sous-groupe classique du groupe quantique compact.
- Ils sont obtenus en restreignant aux partitions non-croisées la construction d'un groupe compact de partitions. Il y a là un parallèle avec un phénomène bien connu en probabilités : si une propriété est régie par la combinatoire des partitions, alors la propriété correspondante en probabilités libres est régie par la même combinatoire restreinte aux partitions non-croisées.
- Le quotient de $C(O_N^+)$ par l'idéal engendré par tous les coefficients non-diagonaux muni du coproduit induit est le dual du groupe discret $\mathbb{Z}_2^{*N}$. Ce dernier est donc le plus grand quotient classique du groupe quantique discret dual de O_N^+. De même, le plus grand quotient classique du dual de U_N^+ est le groupe libre $\mathbb{F}_N$.

Le troisième point suggère l'existence d'une "structure libre" dans le dual de ces groupes quantiques compacts. L'objet qui traduit cette structure libre est le *semi-anneau de fusion*.

Définition 3.1. Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique compact et soir $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles de $\mathbb{G}$. Le semi-anneau de fusion de $\mathbb{G}$ est le semi-anneau $(\mathbb{N}[\mathrm{Irr}(\mathbb{G})], \oplus, \otimes)$, où les opérations sont induites par les opérations correspondantes sur les représentations.

Si $\mathbb{G}$ est le dual d'un groupe discret classique Γ, alors son semi-anneau de fusion est isomorphe à $\mathbb{N}[\Gamma]$ muni du produit induit par la loi de groupe. Une notion de liberté pour les semi-anneaux a été axiomatisée par T. Banica et R. Vergnioux dans [BV09]. Donnons d'abord une définition.

Définition 3.2. Un *ensemble de fusion* est un ensemble S muni d'une involution $x \mapsto \overline{x}$ (appelée conjugaison) et d'une opération de fusion

$$* : S \times S \to S \cup \{\emptyset\}.$$

Soit S un ensemble de fusion. On considère le monoïde libre $F(S)$ sur S, i.e. l'ensemble de tous les mots sur S. L'opération de fusion sur S s'étend au semi-groupe abélien $\mathbb{N}[F(S)]$ de la façon suivante : si $w_1 \dots w_n, w'_1 \dots w'_k \in F(S)$, alors

- $\overline{w_1 \dots w_n} = \overline{w}_n \dots \overline{w}_1$
- $(w_1 \dots w_n) * (w'_1 \dots w'_k) = w_1 \dots (w_n * w'_1) \dots w'_k$

ce dernier étant par convention 0 dès que l'un des deux mots est vide ou que $w_n * w'_1 = \emptyset$. Nous pouvons maintenant faire de $\mathbb{N}[F(S)]$ un *semi-anneau* $(R^+(S), \oplus, \otimes)$ en posant

$$w \otimes w' = \sum_{\substack{w = az \\ w' = \overline{z}b}} ab \oplus a * b.$$

Définition 3.3. Un semi-anneau R^+ est dit *libre* s'il existe un ensemble de fusion S tel que R^+ est isomorphe à $R^+(S)$. Un groupe quantique compact $\mathbb{G}$ est dit libre si $R^+(\mathbb{G})$ est libre.

Tous les exemples de groupes quantiques mentionnés précédemment sont libres :

- Pour U_N^+, $S = \{x, x^*\}$ avec $x * x^* = x^* * x = x * x = x^* * x^* = \emptyset$.
- Pour O_N^+, $S = \{x\}$ avec $x^* = x$ et $x * x = \emptyset$.
- Pour S_N^+, $S = \{x\}$ avec $x^* = x$ et $x * x = x$.
- Pour $\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$, $S = \Gamma$ avec la conjugaison et la fusion donnés respectivement par l'inverse et la loi de groupe.

Cette liste suggère l'existence d'un lien entre partitions non-croisées et semi-anneaux de fusion libres qu'il faut clarifier. Une première étape essentielle dans ce travail est de relier la théorie des représentations de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ à la combinatoire des partitions de $\mathcal{C}$. Ce travail a été réalisé en collaboration avec M. Weber dans [FW14] mais nous ne le décrirons pas ici. La description de la théorie des représentations que nous avons obtenue permet de caractériser les catégories de partitions produisant des groupes quantiques libres. Afin de les décrire, il nous faut introduire une nouvelle propriété des catégories de partitions.

Définition 3.4. Une catégorie de partitions coloriées $\mathcal{C}$ est dite *bloc-stable* si pour toute partitions $p \in \mathcal{C}$ et tout bloc b de p, $b \in \mathcal{C}$.

On peut alors donner la caractérisation de [Fre14a, Thm 4.18] :

Théorème 3.5 (F.)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de partitions non-croisées, soit $N \geqslant 4$ un entier et soit $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ le groupe quantique de partitions associée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ est libre.
(2) $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ n'a pas de représentation non-triviale de dimension 1.
(3) $\mathcal{C}$ est une catégorie de partitions bloc-stable.

Remarque 3.6. Si le foncteur $\mathcal{F}_N$ n'est pas fidèle, raisonner sur les partitions n'est pas suffisant pour comprendre les propriétés du groupe quantique associée. Il faut aussi prendre en compte le noyau de $\mathcal{F}_N$ qui est donné par le *second théorème fondamental de la théorie des invariants*. Toutefois, si la catégorie de partitions $\mathcal{C}$ est non-croisée, on peut montrer que $\mathcal{F}_N$ est fidèle dès que $N \geqslant 4$, d'où la restriction dans l'énoncé précédent.

Les partitions non-croisées permettent donc de produire des groupes quantiques libres. Cette constatation soulève la question réciproque : dans quelle mesure un groupe quantique libre est-il associé à des partitions non-croisées ? Une première réponse est donnée par [Fre14b, Thm 5.2.12].

Théorème 3.7 (F.)**.** *Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique libre. Alors, il existe une catégorie de partitions non-croisées bloc-stable $\mathcal{C}$ telle que pour tout entier $N \geqslant 4$, $R^+(\mathbb{G}) = R^+(\mathbb{G}_N(\mathcal{C}))$.*

3.2. **Classification.** Il est maintenant naturel de chercher à classifier les groupes quantiques libres. Une telle classification passe nécessairement par une classification des ensembles de fusion *admissibles*.

Définition 3.8. Un ensemble de fusion S est dit admissible s'il existe un groupe quantique compact $\mathbb{G}$ tel que $R^+(\mathbb{G}) = R^+(S)$.

De fait, le Théorème 3.7 implique une caractérisation de ces ensembles de fusion.

Proposition 3.9. *Un ensemble de fusion S est admissible si et seulement si*

- *L'opération de fusion $*$ est associative.*
- *S est antisymétrique : $\overline{x * y} = \overline{y} * \overline{x}$.*
- *S a la propriété de Frobenius : $x = y * z$ si et seulement si $\overline{x} * y = \overline{z}$.*

En utilisant ces propriétés, on peut classifier tous les ensembles de fusion admissibles, ce qui a été fait dans [Fre14b, Thm 5.3.21].

Théorème 3.10 (F.)**.** *Tout ensemble de fusion admissible est caractérisé à isomorphisme près par un* triplet de fusion $(n_{\mathcal{O}}, n_{\mathcal{U}}, \mathcal{G})$ *où $n_{\mathcal{O}}$ et $n_{\mathcal{U}}$ sont des entiers et $\mathcal{G}$ est un groupoïde discret.*

Un telle classification n'a d'utilité que s'il est possible d'en déduire une classification des groupes quantiques libres. Le problème se pose alors de savoir en quel sens on souhaite obtenir cette classification. La notion la plus générale dans ce cadre est la R^+-équivalence.

Définition 3.11. Deux groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ sont dits R^+-équivalents si $R^+(\mathbb{G}_1) \simeq R^+(\mathbb{G}_2)$.

Le Théorème 3.7 affirme donc que tout groupe quantique compact libre est R^+-équivalent à un groupe quantique de partitions. Pour obtenir une classification à R^+-équivalence près de tous les groupes quantiques libres, il ne nous reste donc plus qu'à produire un groupe quantique de partitions pour chaque triplet de fusion. Pour ce faire, introduisons d'abord deux nouveaux exemples de groupes quantiques de partitions.

Définition 3.12. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $\mathrm{Pol}(\widetilde{H}_N^+)$ le quotient de la C*-algèbre $\mathrm{Pol}(U_N^+)$ par les relations

$$u_{ki}u_{kj}^* = 0 = u_{ik}u_{jk}^*$$

pour tous $1 \leqslant k \leqslant N$ et $i \neq j$. Si Δ est le coproduit induit, le groupe quantique compact $\widetilde{H}_N^+ = (\mathrm{Pol}(\widetilde{H}_N^+), \Delta)$ est appelé le *groupe quantique hyperoctaédral complexifié*. Soit Λ un groupe discret et soit n un entier. On pose

$$Z_N^+(\Lambda, n) = \left(*_{S_N^+}^n \widetilde{H}_N^+\right) \underset{S_N^+}{*} \left(\widehat{\Lambda} \wr_* S_N^+\right).$$

Remarque 3.13. Le cas $n = 0$ redonne le produit en couronne libre $\widehat{\Lambda} \wr_* S_N^+$. À l'inverse, si Λ est trivial et $n = 1$ on $\widetilde{H}_N^+$.

Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde discret, il peut s'écrire comme l'union disjointe de ses composantes connexes. Chaque composante connexe est entièrement déterminée par un groupe et son nombre d'objets. On peut donc lui associer un groupe quantique de la forme $Z_N^+(\Lambda, n)$. Il est alors facile de montrer que l'ensemble de fusion associé aux produit libre de ces groupes est précisément $\mathcal{G}$. En s'appuyant sur ce fait, [Fre14b, Thm 5.4.7] fournit une classification complète.

Théorème 3.14. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique libre. Alors, $\mathbb{G}$ est R^+-équivalent à un produit libre de copies de O_N^+, U_N^+ et $Z_N^+(\Lambda, n)$.*

Pour améliorer cette classification, il faudrait montrer que pour les groupes quantiques libres, la R^+-équivalence est équivalente à une notion plus forte, par exemple *l'équivalence monoïdale*.

Définition 3.15. Deux groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ sont monoïdalement équivalent s'il existe une $*$-catégorie tensorielle avec dualité $\mathfrak{C}$ et deux foncteurs fibres unitaires fidèles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sur $\mathfrak{C}$ tels que $\mathcal{F}_1(\mathfrak{C})$ soit la catégorie de représentations de $\mathbb{G}_1$ et $\mathcal{F}_2(\mathfrak{C})$ soit la catégorie de représentations de $\mathbb{G}_2$.

Conjecture 3.16. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique libre. Alors $\mathbb{G}$ est monoïdalement équivalent à un produit libre de copies de O_N^+, U_N^+ et $Z_N^+(\Lambda, n)$.*

On peut en fait même espérer aller plus loin. En effet, on sait que pour O_N^+, S_N^+ et U_N^+, tout groupe quantique compact R^+-équivalent peut être reconstruit à l'aide d'un foncteur fibre unitaire fidèle sur $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, \theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ces foncteurs fibres unitaires peuvent être explicitement construits comme des "déformations" des groupes quantiques compacts de départ. En ce sens, on peut alors renforcer la conjecture précédente.

Conjecture 3.17. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique libre. Alors $\mathbb{G}$ est un produit libre de "déformations" de O_N^+, U_N^+ et $Z_N^+(\Lambda, n)$.*

Ajoutons qu'il existe une famille naturelle de déformations de $Z_N^+(\Lambda, n)$ construites à partir des déformations de S_N^+ et qu'il est raisonnable de conjecturer qu'on obtient ainsi toutes les déformations possibles.

Références

[Bic04] J. Bichon, *Free wreath product by the quantum permutation group*, Algebr. Represent. Theory **7** (2004), no. 4, 343–362.

[Bra37] R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. of Math. **38** (1937), no. 4, 857–872.

[BV09] T. Banica and R. Vergnioux, *Fusion rules for quantum reflection groups*, J. Noncommut. Geom. **3** (2009), no. 3, 327–359.

[Del07] P. Deligne, *La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t, lorsque t n'est pas un entier naturel*, Algebraic groups and homogeneous spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. (2007), 209–273.

[Fre14a] A. Freslon, *Fusion (semi)rings arising from quantum groups*, J. Algebra **417** (2014), 161–197.

[Fre14b] ———, *On the partition approach to Schur-Weyl duality and free quantum groups*, Arxiv preprint arXiv :1409.1346 (2014).

[FW14] A. Freslon and M. Weber, *On the representation theory of easy quantum groups*, J. Reine Angew. Math. (2014).

[Jon93] V.F.R. Jones, *The Potts model and the symmetric group*, Subfactors : Proceedings of the Taniguchi Symposium on Operator Algebras (Kyuzeso, 1993), 1993, pp. 259–267.

[KP04] A.J. Kennedy and M. Parvathi, *G-vertex colored partition algebras as centralizer algebras of direct products*, Comm. Algebra **32** (2004), no. 11, 4337–4361.

[Lem14] F. Lemeux, *Fusion rules for some free wreath product quantum groups and applications*, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2507–2550.

[Mar94] P. Martin, *Temperley-Lieb algebras for non-planar statistical mechanics—the partition algebra construction*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), no. 1, 51–82.