Université Paris-Sud - L3 MINT / DL MI-ME
M309 - Calcul Différentiel et optimisation
Année 2017-2018

Feuille de TD n° 2 - Différentiabilité de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 1.
Expliciter le domaine de définition des fonctions suivantes et calculer ses dérivées partielles dans les points où celles-ci existent :

$$f_1(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}, \qquad f_2(x,y,z) = zx^y.$$

Exercice 2.
Calculer les dérivées directionnelles $f'_u(x)$ selon le vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ au point $x \in \mathbb{R}^n$ et, en particulier, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:
i) $f(x) = (a|x)$, où $a \in \mathbb{R}^n$;
ii) $f(x) = (a|x)^2$, où $a \in \mathbb{R}^n$;
iii) $f(x) = \|x\|$.

Exercice 3.
Montrer que l'application définie par $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, n'est pas différentiable en $x = 0$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$|f(u)| \leq \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer f est différentiable en $u = 0$ et donner sa différentielle. Interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 5.
Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (L(x)|x),$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$. Calculer les dérivées directionnelles de f. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.
Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable au point a. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = (f(x)|x),$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est différentiable en a et donner l'expression de la différentielle de F au point a.

Exercice 7.
Soit $f(x,y) = 1 + \sin(xy)$. Déterminer l'expression de la différentielle de f au point $(1,0)$ et l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,0,f(1,0))$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Soit $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Calculer, si celle-ci existe, la dérivée de f en $(0,0)$ suivant le vecteur v, $f'_v(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9.
Soit la fonction f définie en $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Vérifier que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Que peut-on conclure sur la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x^4 + y^4) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}\right), \ (x,y) \neq (0,0).$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^2$. On appelle $\tilde{f}$ ce prolongement.
2. Étudier l'existence de dérivés partielles, leur continuité et la différentiabilité de $\tilde{f}$.

Exercice 11.
Soit $f(x,y) = x^2 y \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que l'on peut définir un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\tilde{f}$ ce prolongement.
2. $\tilde{f}$ admet-il des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3. $\tilde{f}$ est-il de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + (y-1)^3}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, & (x,y) \neq (0,1), \\ 0, & (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,1)$? Justifier.
2. Calculer, si celles-ci existent, les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,1)$? Justifier.
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.