Courbes et surfaces
Math 213

Université Paris-sud
2017-2018

Partiel

Durée de l'épreuve : ***2h***
Les documents sont interdits, ainsi que tout matériel électronique. La qualité de la rédaction sera prise en compte, de même que le soin porté aux figures. Il n'est pas nécessaire de traiter les exercices dans l'ordre où ils sont présentés.

Courbes planes

Exercice 1. — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Étudier l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini en coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ par

$$\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(3t)).$$

Coniques

Exercice 2. — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ et B le point de coordonnées $(-1, 0)$.

1. Soit M un point quelconque de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer en fonction de x et y les longueurs OM^2 et $AM \times BM$.
2. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que $OM^2 = AM \times BM$. Montrer que $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne
$$2x^2 - 2y^2 = 1.$$
En déduire que $\mathscr{C}$ est une conique dont on précisera la nature.
3. Calculer l'excentricité de $\mathscr{C}$, ainsi que les coordonnées de ses foyers.
4. Donner une équation des directrices de $\mathscr{C}$.
5. Soient maintenant C et D deux points quelconques du plan et soit I leur milieu. Soit $\mathscr{C}'$ l'ensemble des points M du plan tels que $IM^2 = CM \times DM$. En choisissant un repère adapté, montrer que $\mathscr{C}'$ est une conique dont on décrira géométriquement un foyer et une directrice.