THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :

Mathématiques

Présentée par :

Olivier FOUQUET

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse :

Tour de courbes de Shimura, systèmes de Kolyvagin et théorie d'Iwasawa des formes modulaires ordinaires

Soutenue le 17 décembre 2007 devant le jury composé de :

Professeur BERTRAND Daniel
Professeur MEREL Loïc
Professeur NEKOVÁŘ Jan (Directeur)
Professeur RUBIN Karl (Rapporteur)
Professeur TILOUINE Jacques (Rapporteur)
Professeur WILDESHAUS Jörg

Remerciements

Emporté par le déluge de symboles et d'entités abstraites qu'est une thèse de mathématiques, le lecteur profane se figure parfois que le cerveau d'un doctorant doit être bien exceptionnel pour s'atteler à de si étranges productions, et que seuls des esprits singuliers peuvent maîtriser les secrets de cette discipline et jouir de sa froide beauté. Avant d'être un mémoire affublé d'un titre aux accents exotiques, une thèse est pourtant le résultat d'une série de rencontres, certaines se faisant sur un gué au milieu de la rivière Kamogawa, d'associations de personnes qui deviennent des associations d'idées et qui finissent par rendre familières, au sens propre, les théories les plus obscures. Les idées mathématiques commencent par un éclat d'intérêt dans l'oeil d'un interlocuteur ; les propositions et les théorèmes par des discussions sur le chemin d'une calanque ; les pages de démonstration par un effort collectif, où la promesse d'une tasse de thé et d'un morceau de chocolat joue un bien grand rôle. Ce sont ces circonstances qui rendent humaines les réflexions abstraites, ce contexte qui permet "de s'arracher aux évidences de l'existence ordinaire pour se poser des questions extra-ordinaires, ou pour poser de manière extra-ordinaire des questions ordinaires" comme le dit Pierre Bourdieu, que j'aimerais évoquer en même temps que je témoigne ma gratitude envers ceux qui m'ont aidé, avant que ma propre contribution ne vienne sans doute renforcer l'image d'altérité radicale qui émane d'un texte mathématique[1].

Mes remerciements vont tout d'abord à Jan Nekovář. Même si Jan lui-même est bien trop modeste pour l'avouer, j'ai quant à moi le sentiment qu'il n'y a pas une étape de mon doctorat qui aurait eu une quelconque valeur sans son énergie et son savoir. Depuis sa patiente réitération du contexte de mon travail de thèse jusqu'à sa lecture vigilante du texte, son aide et sa disponibilité ont rendu possible ce que j'ai fait, et je ne sais comment lui témoigner assez ma gratitude. En conformité parfaite avec son tempérament, quand je lui ai demandé comment je pourrais le remercier, il m'a suggéré d'une phrase une nouvelle direction de recherche et a ajouté que son exploration constituerait un remerciement approprié. Je mesure mon privilège d'avoir pu travailler sous la supervision d'un directeur si impliqué et si talentueux.

C'est avec grand plaisir que j'ai appris que Karl Rubin et Jacques Tilouine étaient les rapporteurs de ma thèse. Depuis mes premiers contacts avec mon futur sujet jusqu'aux dernières minutes de la rédaction, j'ai lu et relu les écrits de Karl Rubin presque quotidiennement, admirant à chaque fois la profondeur, la rigueur et la portée de ses travaux. C'est un honneur qu'il ait accepté d'évaluer ce texte. Jacques Tilouine suit mon travail depuis plusieurs années déjà et chacune des nombreuses fois où je me suis tourné vers lui pour une question de mathématiques, grande ou petite, il m'a fait profiter avec générosité de son enthousiasme communicatif, de son énergie débordante, et de son immense culture. Je le remercie

[1] Je conseille au lecteur qui désirerait au contraire confirmer ce qui pourrait être sa première opinion de sauter au plus vite les quelques lignes qui suivent et d'aller par exemple page 61.

sincèrement d'avoir lu ma thèse et de toute l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie chaleureusement Daniel Bertrand, Loïc Merel et Jörg Wildeshaus d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Hormis Jan, la personne qui a éliminé le plus d'erreurs dans ce qui suit est ma femme, Cécile. Elle restera sans doute la seule personne qui ne sache pas ce qu'est un anneau à avoir lu ma thèse de la première à la dernière page. Cécile a eu la patience de m'entendre expliquer des centaines de fois ce qu'était mon sujet de thèse et à quoi il "servait", m'a rappelé tous les matins la valeur de 1+1 afin que je ne sois pas bloqué dans mon travail et connaît par coeur le rapport entre les téléphones portables, les millefeuilles, les casses-noix imaginaires et les beignets. En conformité avec cette métaphore filée, elle connaît Kazuya Kato surtout comme un guide efficace et passionné du musée du gâteau. Je la remercie de tout mon coeur.

Pendant ces quelques années que j'ai passées dans le monde de la recherche, j'ai eu la chance de travailler avec des mathématiciens qui ont été une source d'inspiration pour moi par la profondeur de leur savoir, la clarté de leurs idées, leur talent ou tout simplement leur grande gentillesse. C'est grâce à elles que j'ai trouvé l'énergie d'attaquer des problèmes qui me paraissaient insurmontables. Je veux en particulier remercier ici Pierre Colmez, Pierre Charollois, Christophe Cornut, Mladen Dimitrov, Gerhard Frey, Kazuya Kato, Tadashi Ochiai, Alexeï Pantchichkine, Robert Pollack et Kartik Prasanna. A l'invitation de Takeshi Saito, j'ai passé un séjour remarquable à l'Université de Tokyo et je lui exprime à nouveau toute ma gratitude pour ce qu'il a fait pour moi, sur le plan mathématique et personnel. Bien que je n'aie jamais eu la chance de le rencontrer, je voudrais remercier Benjamin Howard pour l'aide appréciable qu'il m'a prodiguée dans ma tentative de suivre ses traces.

Chaque fois que j'ai fait appel à eux, je n'ai eu qu'à me féliciter de la compétence des membres du personnel administratif de l'Institut de Mathématiques de Jussieu et je les remercie tous.

La traversée de mes années de thèses a été accompagnée par la fine équipe du bureau 7C04 : Cécile Armana, Manuel Pégourié-Gonnard, Marco Porta ainsi que les grands anciens François Brunault et Joël Riou et notre nouvelle recrue, Jérôme Gartner. On vit rarement plus grands connaisseurs du culte de l'ours, des matrices de Sudoku, du Ramayana et de la crème brûlée via la théorie homotopique des schémas, du désamorçage de centrales nucléaires avec des modules de Drinfeld et de ce mélange agréable et robotique de guitares acoustiques, de synthétiseurs et de voix harmonieuses que sont les courbes de Shimura. Francesco Lemma a toute ma reconnaissance et toute mon admiration pour son appréciation égale de l'harmonie des mathématiques et des accords de jazz, de la saveur d'une bonne idée et d'une bonne tranche de pain. Merci à Dimitar Jetchev et Kâzim Büyükboduk pour leurs regards complices sur mon travail.

Comme le dit la formule consacrée, une partie substantielle de ce travail a été rédigée au Fouquet's et j'en remercie les tenanciers. C'est en discutant avec eux que j'ai découvert des applications totalement nouvelles de ma généralisation à un corps quelconque d'un accouplement parfait connu sur $\mathbb{Q}$.

Parmi les personnes qui ont marqué mon apprentissage des mathématiques, je voudrais remercier René Bouchage d'avoir démontré un après-midi ensoleillé que les décimales de la division de 1 par 7 finirait par se répéter après au plus six calculs et d'avoir suggéré que la démonstration serait la même pour n'importe quel entier. J'avais huit ans et je me souviens encore du vertige que j'ai ressenti. Merci à William Webber pour m'avoir encouragé à penser ; à Frédéric Fluckiger pour m'avoir laissé lire au fond de sa classe ; à Cécile Cartier et Benoit Farvacque pour m'avoir appris à temps que ce que je trouvais évident était simplement faux ; à Édith Helfenstein pour avoir tenté de m'inculquer les vertus de la rigueur et à Jacques Odoux pour m'avoir montré des mathématiques plus belles que toutes celles que je connaissais.

Chaque soir de ces trois dernières années, un homme, presque toujours le même, est rentré pour vider mes poubelles et nettoyer mon bureau. Bien que ce soit la personne que j'ai vue le plus régulièrement pendant ma thèse, je ne connais pas son nom. Il ne le saura probablement jamais, mais cette thèse lui est dédiée.

Tour de courbes de Shimura, systèmes de Kolyvagin et théorie d'Iwasawa des formes modulaires ordinaires

...qui a le loisir de s'arracher aux évidences de l'existence ordinaire pour se poser des questions extra-ordinaires ou pour poser de manière extra-ordinaire des questions ordinaires...

Pierre Bourdieu

Table des matières

Introduction 10

Introduction, English version 17

1 Systèmes d'Euler pour les tours de courbes de Shimura **23**

1.1 Objectifs 23

1.2 Généralités sur les courbes de Shimura quaternioniques 27

1.2.1 Algèbre de quaternions et courbes de Shimura 27

1.2.2 Cohomologie 33

1.3 Jacobiennes et formes modulaires de Hilbert 37

1.3.1 Jacobiennes et algèbre de Hecke 37

1.3.2 Application d'Abel-Jacobi p-adique 40

1.3.3 Formes modulaires de Hilbert 41

1.4 Tours de courbes de Shimura 45

1.4.1 Les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ 45

1.4.2 Involution sur $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ 49

1.4.3 Changement de niveau 58

1.4.4 Dualité dans la tour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ 64

1.4.5 Théorie de Hida 73

1.5 Construction d'un système d'Euler pour $\mathcal{T}$ 83

1.5.1 Points CM sur la tour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ 83

1.5.2 Application d'Abel-Jacobi et classes dans $H^1(K, \mathcal{T})$ 97

1.5.3 Classes dérivées de Kolyvagin 105

2 Théorie d'Iwasawa des systèmes d'Euler **108**

2.1 Objectifs 108

2.2 Représentations p-adiques et groupes de Selmer 109

2.2.1 Représentations p-adiques et structures de Selmer 109
2.2.2 Cohomologie de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ 120
2.2.3 Systèmes de Kolyvagin 129

Introduction

C'est le désir de donner un sens à mes propres travaux, et en particulier de comprendre ce qu'est la théorie d'Iwasawa, qui m'inspire les quelques réflexions de cette introduction. Elles commencent par quelques "vaines spéculations", comme l'aime à dire mon directeur de thèse, et progressent, ou du moins je l'espère, vers une description précise de ce que j'ai réalisé dans mon travail de thèse.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète plat fini sur $\mathbb{Z}_p$ et K un corps de nombres. Soit T une représentation galoisienne

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\, T$$

géométrique, ou bien littéralement ou bien au sens de [FM95]. La représentation T provient donc[2] de la réalisation cohomologique étale d'un motif $\mathcal{M}$. D'après un nombre impressionnant de travaux et de conjectures ([Del79], [Beĭ84], [BK90]...), les propriétés arithmétiques de T sont alors liées à ses nombres de Tamagawa ; autrement dit, il existe des relations subtiles entre les propriétés arithmétiques de T et les théorèmes de comparaison entre les différentes réalisations de $\mathcal{M}$. Une des conceptions modernes de la théorie d'Iwasawa est d'exploiter le fait que T est souvent munie d'une action supplémentaire d'un groupe G. Les conjectures sur les nombres de Tamagawa sont alors conjecturalement équivariantes sous l'action de G. Dans l'exemple paradigmatique où G est le groupe de Galois d'une p-extension de K, on retrouve ainsi les conjectures principales historiques formulées par Iwasawa (voir par exemple [Kat93a] et [Kat93b]).

Je propose dans cette introduction d'explorer une approche un peu différente qui exploite l'idée fondamentale due à Barry Mazur[3] d'étudier la déformation universelle ρ_{univ} de ρ :

$$\rho_{univ} : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_R\, \mathcal{T}$$

Cette représentation rend le diagramme suivant commutatif [4] :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}_R\, \mathcal{T} \arrow[dl, "\phi\in\mathrm{Hom}(R,\mathcal{O})"'] \arrow[dr, "\phi'\in\mathrm{Hom}(R,\mathcal{O})"] & \\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\, T \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}"'] & & \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\, T' \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}"] \\
 & \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\, T/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}T &
\end{tikzcd}$$

[2]Seulement conjecturalement dans le second cas bien sûr, mais je ne m'arrêterai pas à de tels détails dans la première partie de cette introduction.

[3]Et exposée entre autres dans [Maz89], mais je ne sais pas si ce travail est historiquement le premier adoptant cette approche.

[4]Au moins en travaillant à conjugaison près.

Bien entendu, il est possible et souvent souhaitable de se limiter à des déformations vérifiant certaines conditions supplémentaires désirables. La représentation universelle, si elle existe, est à coefficients dans un anneau R local complet noethérien muni d'une action de $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)_p^{ab}]]$, le plus grand quotient abélien p-pro-fini de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. En reprenant le cas classique où K est égal à $\mathbb{Q}$, cette construction donne un sens aux travaux d'Iwasawa : le fait, assez mysterieux pour moi *a priori*, que les propriétés arithmétiques d'une représentation puissent être détectées par son comportement par des twists de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique devient le fait qu'une représentation hérite certaines de ces propriétés de sa déformation universelle. Il est donc tentant de considérer que la théorie d'Iwasawa est l'étude des propriétés qu'une représentation hérite de sa déformation universelle, ou peut-être plus spécifiquement de celles qui peuvent s'exprimer par des conditions locales [5]. En termes plus précis, on considère donc des spécialisations de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire des morphismes $\mathbf{Sp}$ de $\mathcal{O}$-algèbres

$$\mathbf{Sp} : R \longrightarrow \mathcal{O}$$

de conoyaux finis et l'on s'efforce de déduire de certaines propriétés de $\mathcal{T}$ des propriétés semblables pour les représentations $T_{\mathbf{Sp}}$ définies par :

$$T_{\mathbf{Sp}} = \mathcal{T} \otimes_{R,\mathbf{Sp}} \mathcal{O}$$

En pratique, les déformations universelles n'étant pas l'objet le plus courant que l'on puisse imaginer, il est en fait raisonnable de supposer que la démonstration d'une certaine propriété se fera en suivant les trois étapes suivantes :

1. Établir la propriété pour une certaine représentation T.
2. En déduire la propriété, ou une variante appropriée, pour la déformation universelle $\mathcal{T}$ de T satisfaisant éventuellement des conditions supplémentaires.
3. Montrer que la propriété est bien contrôlée par spécialisation.

Pour que cette esquisse théorique puisse se matérialiser en résultats concrets, il apparaît que deux conditions doivent être vérifiées. D'une part, il est nécessaire de disposer d'outils permettant de contrôler le comportement d'une représentation galoisienne lors de ses diverses spécialisations, afin de donner un sens au mot *hérite* dans l'assertion qu'une représentation hérite des propriétés de sa déformation universelle. Mais surtout, il est nécessaire de faire l'hypothèse hautement contre-intuitive qu'il est plus facile de démontrer les propriétés en question pour la déformation universelle que pour la représentation initiale, car le second cas est sensé se déduire par spécialisation du premier. Ceci est en principe inattendu, car ρ_{univ} est à coefficients dans un anneau qui peut-être très grand, et semble donc bien plus compliquée que la représentation qu'elle déforme. Néanmoins, cette méthode peut être fructueuse comme le montre la reformulation suivante des résultats de modularité suivant [Wil95].

[5] Cette limitation est sans doute raisonnable, même si je serais embarrassé d'avoir à donner un exemple de propriétés arithmétiques qui ne soient pas au moins conjecturalement de cette forme.

1. Soit T une représentation modulaire donnée, si bien que l'étape d'initialisation est ici une hypothèse.
2. En déduire qu'une déformation universelle bien choisie $\mathcal{T}$ est modulaire ; ce qui signifie dans ce cas que l'anneau des coefficients de la déformation universelle est égal à l'algèbre de Hecke.
3. Conclure par descente que toutes les spécialisations bien choisies sont modulaires.

Je voudrais expliquer maintenant pourquoi cette philosophie n'est à mon avis pas sans intérêt dans l'étude des conjectures sur les nombres de Tamagawa. Nous avons déjà fait allusion au fait que la p-partie des conjectures équivariantes sur les nombres de Tamagawa s'identifiait avec les conjectures principales historiques d'Iwasawa, et de fait, la démonstration des conjectures équivariantes pour les motifs de Tate sur les extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ de [BG03] procède par spécialisation des résultats de [MW84]. Si seulement nous savions quelle propriété initiale rechercher, ceci nous inciterait à considérer les étapes :

1. Établir une propriété initiale pour T.
2. En déduire une conjecture principale appropriée pour $\mathcal{T}$.
3. En déduire la p-partie des conjectures sur les nombres de Tamagawa par spécialisation.

Les travaux de [Kol90], [Rub00], [PR98], [Kat04] et la recommandation explicite de [Kat93b] suggèrent que la propriété initiale souhaitée est l'existence d'un système d'Euler au sens de Kolyvagin[6] pour la représentation T. Cela est d'autant plus tentant du fait que la deuxième étape de notre méthode devient alors le problème très explicite d'étendre le système d'Euler initial à la déformation universelle et d'adapter la méthode des systèmes d'Euler dans ce contexte. Il semble très probable que les systèmes d'Euler connus s'étendent effectivement aux déformations universelles de leur représentations respectives, et je m'attendrais à ce qu'il le fasse de façon rigide, c'est-à-dire en vérifiant la généralisation appropriée du théorème 4.3.3 de [MR04] dû à Benjamin Howard et du théorème A de [Buy07].

Le travail qui suit est une tentative modeste de mettre en oeuvre une partie de ces idées dans le cas des déformations ordinaires des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Hilbert ordinaires. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d et p un nombre premier rationnel impair. Soit

$$f \in S_k(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s), \omega)$$

une forme modulaire de Hilbert ordinaire, parabolique, propre, p-stabilisée de poids parallèles pairs. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète de corps résiduel $\mathbb{F}$ de caractéristique résiduelle p et de corps des fractions $L_{\mathfrak{p}}$. A f est associée une

[6] Je voudrais éviter ici la difficile question de la définition d'un système d'Euler/Kolyvagin. Pour ce qui suit, j'entends par système d'Euler une collection de classes de cohomologie vérifiant des propriétés de compatibilité imitant celles vérifiées par les fonctions L partielles.

représentation galoisienne

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{L_\mathfrak{p}} V(f)$$

absolument irréductible. Un choix de $\mathcal{O}$-réseau $T(f) \subset V(f)$ stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ définit une représentation galoisienne

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T(f)$$

Si la représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$

$$\bar{\rho}_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} T/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}T$$

associée à un choix de réseau stable est absolument irréductible, ou simplement irréductible puisque p est impair, alors elles le sont toutes, tous les choix possibles et tous les réseaux stables de $V(f)$ sont colinéaires à un réseau minimal et le choix du réseau minimal permet de parler de la représentation résiduelle de $V(f)$. La théorie de Hida, telle que décrite par exemple dans [Wil88] et [Hid88], permet de construire une famille p-adique de représentations galoisiennes ordinaires déformant $V(f)$ et une représentation galoisienne

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Frac}(R)} V$$

à coefficients dans le corps des fractions $\mathrm{Frac}(R)$ d'un anneau noethérien local complet plat et de type fini sur une algèbre d'Iwasawa Λ. Si $1+\delta$ désigne le nombre de $\mathbb{Z}_p$-extensions de F, alors Λ est égal à $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ où Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^{1+\delta}$. Nous supposons dans la suite de cette introduction que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p. Si de plus f est de poids 2 et est dans l'image de la correspondance de Jacquet-Langlands associée à une algèbre de quaternions B, la représentation galoisienne ρ_f intervient dans la cohomologie étale

$$H^1_{et}(X \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

d'une courbe de Shimura quaternionique X associée a B. Depuis les travaux fondateurs de [GZ86] et de [Kol90] et leurs prolongations dans diverses directions, entre autres par [PR87b], [Nek92], [Nek95], [BD98], [Zha01] et [BD05], il semble clair que les propriétés arithmétiques de la représentation galoisienne $T(f)$ sont intimement liées à certains points spéciaux sur X. Plus précisément, soit K une extension quadratique totalement imaginaire de F telle que toute place de S_B ramifie ou bien soit inerte dans K/F. A K est associé un ensemble de points sur X, dits points CM, qui sont définis sur des extensions abéliennes de K diédrales sur F et dont l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^{ab}$ est donnée explicitement par la loi de réciprocité de Shimura. Nous considérons tout particulièrement des familles de points CM sur des tours de courbes de Shimura $X(s)$

$$x(\mathfrak{c}, s) \in CM(X(s), K)$$

telles que $x(\mathfrak{c}, s)$ soit rationnel sur l'extension $K(\mathfrak{c}, s)$ abélienne sur K. La propriété fondamentale de ces familles est de satisfaire à certaines relations de distribution reliant l'action de la correspondance de Hecke $T(l)$ sur $x(\mathfrak{c}, s)$ et celle de $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))$ sur $x(\mathfrak{c}l, s)$ d'une part ; l'action de $T(p)$ sur $x(\mathfrak{c}, s)$ et celle de $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s+1)/K(\mathfrak{c}, s))$ sur $x(\mathfrak{c}, s+1)$ d'autre part. Ces relations font d'une modification appropriée des points $x(\mathfrak{c}, s)$ un système d'Euler pour $T(f)$. Suivant en cela les idées exposées plus haut, notre tâche devient alors de montrer qu'ils s'étendent, en un sens à définir, à une certaine déformation universelle de $T(f)$. Soit D_∞ la $\mathbb{Z}_p^d$-extension anticyclotomique de K. Que les compatibilités entre points de conducteurs $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}l$ permettent de construire des objets reliés aux propriétés de la déformation

$$T(f) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(D_\infty/K)]]$$

a été montré par exemple dans [PR87a], [How04a] et [How04b]. Cela peut donc être considéré comme relativement classique. La difficulté est de donner un sens à l'extension du système d'Euler des points CM pour la variable de déformation provenant de la famille de Hida. Le problème vient du fait que les objets généralisant naturellement les points CM en poids k supérieur à 2 sont des cycles de codimension $k/2$, par exemple comme dans [Nek92] et [Nek95]. Mais il n'y a alors pas de moyen apparent de relier des cycles de codimensions différentes.

L'idée fondamentale de Benjamin Howard exposée dans [How07] est de remarquer que ce problème se pose exactement dans les mêmes termes pour les représentations galoisiennes : deux représentations galoisiennes associées à des formes de poids différents semblent suffisamment distinctes pour qu'il paraisse difficile de les rendre compatibles. Néanmoins, grâce à la théorie de Hida, nous savons qu'il suffit dans le cas ordinaire de montrer des compatibilités pour le niveau pour obtenir des compatibilités pour le poids. La relation de distribution entre $x(\mathfrak{c}, s+1)$ et $x(\mathfrak{c}, s)$ permet donc de construire un système compatible en poids variables. Concrètement, les images de la partie ordinaire des points $x(\mathfrak{c}, s)$ par l'application d'Abel-Jacobi p-adique

$$\Phi : e^{ord} CH^1(X(s) \otimes_F \bar{F})_0 \longrightarrow H^1(K, H^1_{et}(X(s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})(1))$$

forment un système compatible de classes de cohomologie $z(\mathfrak{c})$ dans

$$\varprojlim_s \varprojlim_t H^1(K(\mathfrak{c}p^t), e^{ord} H^1_{et}(X(s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})(1))$$

Cette limite inverse est une déformation ordinaire de $T(f)$. Ceci réalise la première étape de notre programme.

Reste à établir que les classes que nous construisons permettent de construire effectivement un système de Kolyvagin. Ceci impose d'étudier précisément certains groupes de cohomologie associée à nos grandes représentations. Malheureusement, je suis incapable à l'heure actuelle de démontrer que les classes que j'obtiens vérifient les bonnes propriétés locales en (p). Cela est d'autant plus dommageable que si nous savions démontrer les bonnes propriétés locales en (p), alors la méthode axiomatique des systèmes de Kolyvagin pour les anneaux réguliers, telle qu'exposée par exemple dans [How04b] et [Och05], s'appliquerait à notre situation et donnerait des relations de divisibilité intéressantes et nouvelles dans le style des conjectures principales pour des déformations à plusieurs variables provenant de formes modulaires ordinaires[7].

Mon résultat principal s'énonce sous la forme suivante.

Théorème 1. *Soit p un nombre premier impair. Soit F un corps de nombre totalement réel de degré d satisfaisant la conjecture de Leopoldt en p. Soit B une algèbre de quaternions sur F ramifiée en exactement une place à l'infini et dont l'ensemble de places finies de ramifications soit de cardinal congru à $d-1$ modulo 2. Soit $\{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$ une tour de courbes de Shimura quaternioniques muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$. Soit R un facteur local de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ vérifiant les hypothèses 1.4.26, 1.4.28, 1.4.29, 1.4.30 et 1.5.23. La représentation de* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$

$$\mathcal{W}_\infty^{dual}(R) = \varprojlim_s e_R^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

est un R-module libre de rang 2. Un twist convenable de $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)$ fournit une représentation $\mathcal{T}$ à coefficients dans R auto-duale interpolant les représentations galoisiennes associées à des familles de formes modulaires de Hilbert ordinaires. Soit K une extension quadratique totalement imaginaire de F telle que toute place finie de ramification de B ramifie ou bien soit inerte dans K/F. Soit D_∞ la $\mathbb{Z}_p^d$-extension anticyclotomique de K. Soit :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} = \mathcal{T} \otimes_R R[[\mathrm{Gal}(D_\infty/K)]]$$

Supposons que toutes les places v de F divisant $\mathcal{N}$ décomposent dans K/F.

Il existe alors un système de classes $(\mathfrak{z}(n))$ indexé par certains idéaux de $\mathcal{O}_F$ et construit à partir de points CM sur la tour $\{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$ tel que

$$\mathfrak{z}(n) \in H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

et vérifiant les compatibilités classiques d'un système d'Euler. Il existe un système de classes dérivée $\varkappa(n)$ tel que

$$\varkappa(n) \in H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

et tel que la localisation en une place λ ne divisant pas (p) de $\varkappa(n)$ vérifie :

$$\varkappa(n)_\lambda \in H^1_{Gr(n)}(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

Lorsque F est égal à $\mathbb{Q}$, ce résultat est dû à Benjamin Howard ; [How07] proposition 2.4.5.

[7]Comme j'ai eu l'occasion de le vérifier de façon approfondie avant de réaliser qu'une étape cruciale faisait défaut.

La continuation nécessaire de mon travail requiert de montrer les propriétés locales appropriées en (p) des classes $\varkappa(n)$ et de contrôler leur comportement par diverses spécialisations. La méthode des systèmes de Kolyvagin devrait alors fournir des résultats partiels dans la direction de la conjecture principale à plusieurs variables pour un famille de Hida. La généralisation la plus naturelle imaginable serait de construire des classes de cohomologie généralisant celles étudiées ici pour d'autres groupes réductifs, ce qui produirait potentiellement de nouveaux systèmes d'Euler pour des représentations galoisiennes venant de formes automorphes plus générales. La philosophie générale de la théorie d'Iwasawa prédit que la classe de cohomologie $\varkappa$ devrait être liée à une fonction L p-adique à plusieurs variables appropriées. Les exemples connus suggèrent que cette relation devrait prendre la forme d'un lien entre la dérivée d'une certaine fonction L p-adique et la hauteur p-adique de $\varkappa$. Les fonctions L que j'imagine devoir apparaître ne sont à ma connaissance pas encore bien définies. Un progrès immédiat et frappant serait l'adaptation de l'axiomatique des systèmes d'Euler/Kolyvagin pour R par exemple local complet noethérien et de Gorenstein, plutôt que régulier. Ceci nécessiterait des propriétés des contrôle nettement plus fines et une théorie plus avancée des spécialisations de R.

Après lecture de ce qui précède, il doit être clair que ce qui suit n'est qu'une pâle variation sur les thèmes et idées explorés magnifiquement dans [Rub00], [MR04], [Nek04], [How04a], [How04b], et [How07]. Ma compréhension des mathématiques doit beaucoup à [Kat93b] et [Nek06]. Les lecteurs familiers de mon directeur de thèse comprendront peut-être pourquoi je rappelle la convention de notation suivante : dans ce qui suit, supérieur signifie supérieur ou égal.

Introduction, English version

The ideas of this introduction[8] stem from a desire to make sense of my own work, and in particular to understand what "Iwasawa-theoretic" might mean. Starting with "idle speculations", as my advisor likes to say, we hopefully move on towards more precise things.

Let $\mathcal{O}$ be a discrete valuation ring finite flat over $\mathbb{Z}_p$ and K a number field. Let T be a geometric (either literally or in the sense of [FM95]) Galois representation :

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T$$

The representation T thus[9] arises from the étale cohomology realization of a motive $\mathcal{M}$. A daunting number of works (among which [Del79], [Beĭ84], [BK90]...) then suggest that arithmetic properties of T are linked to what has been called its Tamagawa numbers ; or in other words that there exists a subtle interplay between arithmetical properties of T and the comparison isomorphisms between different realizations of $\mathcal{M}$. One of the modern approaches to Iwasawa theory exploits the fact that T often comes with a supplementary group G. The Tamagawa number conjectures are conjecturally equivariant under the action of G. In the emblematic example where G is the Galois group of an abelian p-extension of K, one then retrieves the historical main conjectures as formulated by Iwasawa (see among others [Kat93a] and [Kat93b]).

In this introduction, I would like to explore a slightly different approach that follows Barry Mazur's idea of fitting T into a p-adic family of Galois representations, that is to say, to introduce the universal deformation ρ_{univ} of ρ.

$$\rho_{univ} : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_R \mathcal{T}$$

This representation makes the following diagram commute[10].

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}_R \mathcal{T} \arrow[dl, "\phi\in\mathrm{Hom}(R,\mathcal{O})"'] \arrow[dr, "\phi'\in\mathrm{Hom}(R,\mathcal{O})"] & \\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T \arrow[dr, "\bmod \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}"'] & & \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T' \arrow[dl, "\bmod \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}"] \\
 & \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} T/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} T &
\end{tikzcd}$$

[8] Attentive readers will notice differences between the French and English version of the introduction-mainly issues of style.

[9] Only conjecturally in the second case but such details will not stop me in the first part of this introduction.

[10] At least up to conjugation, but I will ignore this in this introduction.

Of course, it is possible and often desirable to restrict oneself to deformations satisfying extra conditions of interest. The universal deformation, if it exists, has coefficients in a ring R endowed with an action of $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)_p^{ab}]]$, the largest abelian p-pro-finite quotient of $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Taking the classical case where K is equal to $\mathbb{Q}$, this gives a justification to the original work of Iwasawa ; the rather mysterious fact that the arithmetical properties of a representation can be detected by studying its behavior under twists by the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension becomes the fact a representation inherits properties from its universal deformation. It is thus tempting to define Iwasawa theory as the study of those properties that a representation inherits from its universal deformation, or perhaps less generally of those properties that can be expressed through local conditions[11]. In more precise terms, we look at specializations of R, that is at $\mathcal{O}$-algebra morphisms

$$\mathbf{Sp} : R \longrightarrow \mathcal{O}$$

with finite cokernels and strive to deduce certain properties of $T_{\mathbf{Sp}} = \mathcal{T} \otimes_{R,\mathbf{Sp}} \mathcal{O}$ from the relevant property of $\mathcal{T}$. In concrete examples, and especially because universal deformations are not the most natural object to come by, it is reasonable to surmise that this kind of study would be conducted following three steps :

1. Show a certain property for an initial representation T.
2. Deduce that property of an appropriate variant for the universal deformation $\mathcal{T}$, possibly imposing extra conditions on $\mathcal{T}$.
3. Establish the initial property for specializations of $\mathcal{T}$ by specializing the results of step 2.

For this vague sketch to materialize in concrete results, it is necessary that two conditions are satisfied. First, in order for the word *inherits* to have a meaning in the assertion that a representation inherits properties from its universal deformation, the property we are interested in has to be reasonably well-behaved under specialization. But more importantly, it is necessary to make the highly counter-intuitive assumption that it is easier to prove the relevant property for the universal deformation than for the initial representation, as the second case is supposed to be deduced from the first. This seems at first unlikely, as ρ_{univ} has values in a much bigger ring than $\mathcal{O}$ and thus looks much more complicated that ρ. Nevertheless, it seems that this approach can be fruitful, as can be shown by the following reformulation of modularity results following [Wil95].

1. Start with a modular representation, so that our initial step is here an assumption.
2. Show that $\mathcal{T}$ is modular, which means here that the ring of coefficients of the universal deformations is some Hecke algebra.
3. Deduce that specializations of $\mathcal{T}$ are modular as well.

[11]This limitation seems reasonable, though I would be hard-pressed to provide an example of an arithmetical property that has no such formulation, at least conjecturally.

I would like to explain why this philosophy is not, in my opinion, without interest in the study of Tamagawa number conjecture. We already alluded to the fact that the p-part of the equivariant Tamagawa number conjecture is closely related to the historical main conjectures of Iwasawa, and indeed the proof of the equivariant conjectures for abelian Tate motives over $\mathbb{Q}$ in [BG03] is by careful specialization of the results of [MW84]. If only we knew what initial property to look for, this would suggest to follow the three steps

1. Show a certain property for an initial representation T.
2. Deduce the main conjecture for $\mathcal{T}$.
3. Show the p-part of the Tamagawa number conjecture by specialization.

After the works of [Kol90], [PR98], [Rub00], [Kat04] among others, and the explicit recommendation of [Kat93b], a likely guess for the initial property would be that T admits an Euler system in the sense of Kolyvagin. This is particularly tempting since the second step then becomes the very explicit task of extending the given Euler system to the universal deformation ring and to adapt the Euler system machinery to the relevant case. It seems very likely that Euler and Kolyvagin systems, when they do exist, indeed extend to the universal deformation ring, and I expect that they do so full-fledged, that is to say with the appropriate generalization of Benjamin Howard's theorem in [MR04] theorem 4.3.3 and Kazim Buyukboduk's theorem A in [Buy07].

The following work is a modest attempt to put part of these ideas to the test in the case of deformations of Galois representations arising from ordinary Hilbert modular forms of parallel even weights. Let F be a totally real number field of degree d and $f \in S_k(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s), \omega)$ an ordinary p-stabilized parabolic eigenform of parallel even weights equal to k. Let $\mathcal{O}$ be a discrete valuation ring with residual field $\mathbb{F}$ of characteristic p and fraction field $L_{\mathfrak{p}}$. To f is associated an absolutely irreducible Galois representation :

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{L_{\mathfrak{p}}} V(f)$$

Choosing a $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-stable $\mathcal{O}$-lattice of $V(f)$ gives a Galois representation :

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T(f)$$

If the residual representation $\bar{\rho}_f$

$$\bar{\rho}_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} T/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} T$$

attached to one choice of lattice is absolutely irreducible, or simply irreducible as p is odd, then all are, all stable lattices are multiples of a minimal one, and the minimal choice of lattice is a suitable definition of the residual representation of $V(f)$. Hida theory, as described for instance in [Wil88] or in [Hid88], gives a p-adic family of Galois representation deforming $V(f)$ and a Galois representation

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Frac}(R)} V$$

with coefficients in the fraction field $\mathrm{Frac}(R)$ of a complete local noetherian ring finite flat over an Iwasawa algebra Λ. If $1+\delta$ is the number of $\mathbb{Z}_p$-extensions of F, then Λ is equal to $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ with Γ isomorphic to $\mathbb{Z}_p^{1+\delta}$. We henceforth suppose that F satisfies Leopoldt's conjecture at p. If furthermore f is of weight 2 and is in the image of the Jacquet-Langlands correspondence of a quaternion algebra B, then the Galois representation ρ_f appears in the étale cohomology

$$H^1_{et}(X \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

of a quaternionic Shimura curve X associated to B. Since the seminal works [GZ86] and [Kol90] and the following developments in [PR87b], [Nek92], [Nek95], [BD98], [Zha01], [BD05] and others, it seems clear that the arithmetical properties of $T(f)$ are intimately linked to certain special points on X. More precisely, let K be a totally imaginary quadratic extension of F such that any finite place of ramification of B either ramifies or is inert in K/F. To K is associated CM points on X defined on abelian extensions of K dihedral over F and endowed with an action of $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^{ab}$ explicitly given by the Shimura reciprocity law. We consider specifically families of CM points defined on towers of Shimura curves $X(s)$

$$x(\mathfrak{c}, s) \in CM(X(s), K)$$

such that $x(\mathfrak{c}, s)$ is rational over $K(\mathfrak{c}, s)$. The defining properties of these families are certain distribution relations linking first the action of the Hecke correspondence $T(l)$ on $x(\mathfrak{c}, s)$ and the action of $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))$ on $x(\mathfrak{c}l, s)$, second the action of $T(p)$ on $x(\mathfrak{c}, s)$ and the action of $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s+1)/K(\mathfrak{c}, s))$ on $x(\mathfrak{c}, s+1)$. An appropriate modification of those points then becomes an Euler system for $T(f)$.

Following the lay-out we described above, our task is then to show that they extend in some sense to an Euler system for a universal deformation of $T(f)$. Let D_∞ be the dihedral $\mathbb{Z}_p$-extension of K. The fact that compatibility relations between points with conductor $\mathfrak{c}$ and points with conductor $\mathfrak{c}l$ allow to build objects linked to the study of

$$T(f) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(D_\infty/K)]]$$

has been showed among other works in [PR87a], [How04a] and [How04b]. It is thus fairly classical. Much harder is to extend the Euler system of CM points in the direction of weight in a Hida family. The difficulty stems from the fact that the most natural objects generalizing points in higher weight cases k are codimension $k/2$ cycles, as for instance in [Nek92] and [Nek95]. But it is then not obvious how to relate cycles of different codimensions. The fundamental breakthrough of Benjamin Howard explained in [How07] is to notice that the very same problem is already present in the study of Galois representations : Galois representations of unequal weights look different enough that it is hard to see how to fit them in p-adic family. Thanks to Hida theory, though, we know that after restriction to the ordinary case, it is sufficient to fit them in a family for the level. The distribution relation linking $x(\mathfrak{c}, s)$ and $x(\mathfrak{c}, s+1)$ does just that. Concretely, the images of the points $x(\mathfrak{c}, s)$ by the p-adic Abel-Jacobi map

$$\Phi : e^{ord} CH^1(X(s) \otimes_F \bar{F})_0 \longrightarrow H^1(K, H^1_{et}(X(s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})(1))$$

are a compatible system of cohomology classes in

$$\varprojlim_s \varprojlim_t H^1(K(\mathfrak{c}p^t), e^{ord} H^1_{et}(X(s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})(1))$$

This inverse limit contains an ordinary deformation of $T(f)$.

We then have to show precise compatibilities between the classes we construct in order to prove that they indeed form a Kolyvagin system. This requires a careful analysis of the cohomology group of our representations. Unfortunately, I have until now been unable to prove that the classes I consider verify the desired local properties in (p). This is particularly frustrating as the knowledge of such local properties combined with the axiomatic method of Kolyvagin systems for regular rings, as described for instance in [How04b] and [Och05], would then give new and interesting divisibility relations in the style of the main conjectures for several variables deformations arising from ordinary modular forms[12].

My main result takes the following form.

Theorem 1. *Let p be an odd prime. Let F be a totally realf field of degree d satisfying Leopoldt's conjecture at p. Let B be a quaternion algebra ovre F ramified in exactly one infinite place and such that its set of ramified finite places has cardinal equal to $d-1$ modulo 2. Let $\{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$ be a tower of quaternionic Shimura curves endowed with an action of the Hecke algebra $\mathfrak{h}^{dual}_\infty$. Let R be a local factor of $\mathfrak{h}^{dual}_\infty$ satisfying the hypothesis 1.4.26, 1.4.28, 1.4.29, 1.4.30 and 1.5.23. The representation of* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$

$$\mathcal{W}^{dual}_\infty(R) = \varprojlim_s e^{dual}_R H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

is a free R-module of rank 2. A suitable twist of $\mathcal{W}^{dual}_\infty(R)$ gives a self-dual Galois representation with coefficients in R interpolating ordinary families of Hilbert modular forms. Let K be a be a totally imaginary quadratic extension of F such that any finite place of ramification of B either ramifies or is inert in K/F. Let D_∞ be the anticyclotomic $\mathbb{Z}_p^d$-extension of K. Define :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} = \mathcal{T} \otimes_R R[[\mathrm{Gal}(D_\infty/K)]]$$

Assume that all places of F dividing $\mathcal{N}$ split in K.

There then exists a system of classes $\mathfrak{z}(n)$ indexed by some ideals of $\mathcal{O}_F$ constructed from CM points on the tower $\{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$ such that

$$\mathfrak{z}(n) \in H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

[12] As I checked quite thoroughly before realizing a crucial step was missing.

and verifying the classical compatibility relations of an Euler system. There exists a system of derived classes $\varkappa(n)$ such that

$$\varkappa(n) \in H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

and such that the localization of $\varkappa(n)$ at a finite place λ outside (p) verifies :

$$\varkappa(n)_\lambda \in H^1_{Gr(n)}(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

When F is equal to $\mathbb{Q}$, this is a result of Benjamin Howard; [How07] proposition 2.4.5.

Here follows a few problems and questions raised by my work. The necessary development is to appropriate local conditions at (p) and to control their behavior under specializations. The method of Kolyvagin system should then prove partial results towards main conjectures.The most natural conceivable generalization would be to construct similar classes for different reductive groups, in the hope that they would provide Euler systems for p-adic representations coming from more general automorphic forms. The general philosophy of Iwasawa theory predicts that the class $\varkappa$ should be linked to an appropriate several variables p-adic L function. Known cases suggest that this link should be an equality between the derivative of the p-adic L function and the height of $\varkappa$. The L functions that I imagine should arise in our case of interest are to the best of my knowledge not even defined yet. A striking and immediate progress would be to generalize the axiomatic method of Euler/Kolyvagin system for instance in the case of Gorenstein complete local noetherian ring, rather than regular ones. This accomplishment would probably require much finer control properties than those I know and a much refined theory of specializations.

Reading this introduction will have made abundantly clear that what follows is a pale variation on the themes and ideas magnificently explored in [Rub00], [MR04], [Nek04], [How04a], [How04b], and [How07]. Because of their impact on my understanding of mathematics, I would like to add [Kat93b] and [Nek06]. Readers well-acquainted with my Ph.D. adviser may understand why I recall the following convention: in what follows, *supérieur* means greater or equal.

Chapitre 1

Systèmes d'Euler pour les tours de courbes de Shimura

1.1 Objectifs

L'objectif de ce premier chapitre est la construction d'une grande représentation galoisienne associée à une famille de formes modulaires de Hilbert ordinaires ainsi que de classes de cohomologie particulières dans la cohomologie galoisienne de cette représentation.

Soit F un corps de nombre totalement réel de degré d et B une algèbre de quaternions sur F ramifiée en exactement une place infinie et dont l'ensemble des places de ramification finies est de cardinal congru à $d-1$ modulo 2. A une tour $\{U(s)\}_{s\geq 1}$ de sous-groupes compacts ouverts des points idéliques $\widehat{B}^{\times}$ de B est associée une tour de courbes de Shimura quaternioniques $\{M_s\}_{s\geq 1}$:

$$\begin{array}{c} \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M_{s+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M_s \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \cdots \end{array}$$

Pour s plus grand que 1, la surface de Riemann associée à M_s est :

$$M_s^{an} = B^{\times}\backslash(X \times \widehat{B}^{\times})/U(s)$$

Chaque courbe M_s est munie d'une action de $\widehat{F}^{\times}$ par l'inclusion de $\widehat{F}^{\times}$ dans $\widehat{B}^{\times}$. Cette action se factorise à travers un groupe G_s, nécessairement fini car $U(s)$ est maximal en presque toute place. Soit p un nombre premier rationnel impair tel que B ne ramifie pas en v divisant (p). Nous supposons de plus que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p, même si cela ne modifie sans doute rien de significatif dans ce que nous allons expliquer. Supposons que $U(s)_v \cap F_v^\times$ tend vers 0 lorsque s tend vers l'infini en v divisant (p) et que $U(s)_v \cap F_v^\times$ est indépendant de s si v ne divise pas (p). La tour de courbes $\{M_s\}_{s\geq 1}$ est alors munie d'une action du groupe profini :

$$G_\infty = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ s}} G_s$$

Ce groupe a une partie de torsion finie et son quotient par son sous-groupe de torsion est isomorphe à $\Gamma = \mathbb{Z}_p^n$. Soit $L_\mathfrak{p}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Les applications de transition π_* induisent des projections :

$$\cdots \longrightarrow H^1_{et}(M_{s+1} \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{et}(M_s \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots$$

La limite inverse

$$\mathcal{W}_\infty = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ s}} H^1_{et}(M_s \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

est donc un $\mathcal{O}[[G_\infty]]$-module muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. La correspondance de Jacquet-Langlands implique que le groupe de cohomologie $H^1_{et}(M_s \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$ vu comme représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ contient la représentation galoisienne associée à une forme modulaire de Hilbert de poids parallèles égaux à 2.

Après des rappels généraux sur les courbes de Shimura quaternioniques, nous étudions donc une tour particulière de sous-groupes compacts ouverts de $\widehat{B}^\times$, la tour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$. Pour cette tour, le groupe G_∞ s'inscrit dans une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times / \bar{\mathcal{O}}_{F,+}^\times \longrightarrow G_\infty \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow 0$$

Le groupe Γ est alors isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Voir par exemple la proposition 1.4.6 page 49. La représentation galoisienne

$$\mathcal{W}_\infty^{dual} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ s}} e^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

est un $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module. La tour $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ est munie d'un système d'involutions qui correspondent aux involutions de Atkin-Lehner dans le cas classique où F est égal à $\mathbb{Q}$ et où B est $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Une généralisation à notre cadre d'étude des propriétés de compatibilité entre la dualité de Poincaré et ses involutions montre que $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est un module réflexif. Plus précisément :

$$\mathcal{W}_\infty^{dual} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{W}^{dual}, \Lambda)(-1) < -1 >$$

Voir la proposition 1.4.19 pour les détails. Ces résultats sont très classiques dans le cas des formes modulaires elliptiques (ils sont par exemple démontrés dans [MW84], [Oht95], [NP00]) et sont certainement bien connus pour les courbes de

Shimura, mais ils sont rappelés ici à fin d'obtenir un texte relativement auto-contenu. De cette auto-dualité, nous déduisons que $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est un module libre de rang fini sur Λ.

Nous choisissons ensuite un facteur local R de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ que nous supposons intègre, de Gorenstein et résiduellement irréductible (voir les hypothèses 1.4.26 page 76 et 1.4.29 page 79 pour les détails). Nous construisons dans le théorème 1, page 81 une représentation à coefficients dans R interpolant les représentations galoisiennes provenant d'une famille de Hida de formes modulaires ordinaires. Dans le cas classique où F est égal à $\mathbb{Q}$, la représentation précédente peut être tordue en une représentation $\mathcal{T}$ isomorphe en tant que $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$ à $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, R(1))$. Pour F totalement réel général, cela est possible si la partie modérée du caractère central de notre représentation est un carré et nous faisons donc cette hypothèse.

Nous remarquons à nouveau que ce que nous avons énoncé jusqu'à maintenant est sans aucun doute bien connu.

Une fois la représentation $\mathcal{T}$ construite, nous nous attachons à exhiber des classes de cohomologie particulières de $H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$ pour certaines extensions abéliennes $K(\mathfrak{c})$ de K en suivant les méthodes de [Nek04] et [How07]. Si K est une extension quadratique totalement imaginaire de F telle que toute place finie de ramification de B soit ramifiée ou inerte dans K/F, chaque courbe de la tour $\{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$ admet des points CM pour K. Ces points sont définis sur des extensions abéliennes de K et l'action de $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ est décrite explicitement par la loi de réciprocité de Shimura. Nous construisons des points CM particuliers $x(\mathfrak{c}, s) \in M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)(K(\mathfrak{c}, s))$ dépendant d'un conducteur $\mathfrak{c}$ et d'un niveau s qui vérifient des relations de distribution semblables à celles des points de Heegner sur $X_0(N)$. En particulier, la trace de $x(\mathfrak{c}l, s)$ de $K(\mathfrak{c}l, s)$ à $K(\mathfrak{c}, s)$ est liée à l'action de la correspondance de Hecke $T(l)$ sur $x(\mathfrak{c}, s)$. Après projection sur la partie ordinaire, ces compatibilités permettent en particulier de former un système projectif de points pour le niveau s. L'application d'Abel-Jacobi p-adique fournit alors des classes dans $H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$. Comme mentionné dans l'introduction, l'ingrédient essentiel de notre construction est l'observation importante de Benjamin Howard que la construction d'un système d'Euler pour la famille de représentations galoisiennes associées à une famille de Hida nécessite seulement de construire des classes de cohomologie vérifiant de bonnes propriétés de compatibilité pour le niveau, et cela est justement possible par nos relations de distribution.

Les étapes principales de notre construction sont, outre la définition 1.5.4 page 86, la proposition 1.5.14 page 99 qui exprime la compatibilité en s de nos classes et les deux propositions 1.5.18 page 101 et 1.5.19 page 102 qui montrent que nos classes vérifient des relations très proches de celles d'un système d'Euler au sens de Kolyvagin.

Notre dernière tâche dans cette première partie est de montrer que nos classes de cohomologie vérifient également des bonnes propriétés de compatibilité pour la corestriction dans la $\mathbb{Z}_p^d$-extension anticyclotomique de K. Ceci est finalement mené à bien par la définition 1.5.20 page 104.

Nous rappelons également ici trois lemmes d'usage fréquent dans cette partie.

Lemme 1.1.1. *Soit $C \subset B \subset A$ trois groupes abéliens. Alors B/C est le noyau de la surjection canonique*

$$A/C \longrightarrow A/B$$

Lemme 1.1.2. *Soit G un groupe abélien. Soit $A \subset G$ et $C \subset B \subset G$ trois sous-groupes. La suite courte suivante est alors exacte :*

$$1 \longrightarrow \frac{A \cap B}{A \cap C} \longrightarrow \frac{B}{C} \longrightarrow \frac{AB}{AC} \longrightarrow 1$$

Lemme 1.1.3. *Soit F un corps de nombres totalement réel et p un nombre premier rationnel. Nous supposons que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p. Soit $(F_s)_{s\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'extensions abéliennes finies de F et :*

$$F_\infty = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} F_s$$

Nous supposons que F_∞ est infinie et que l'application de réciprocité

$$\mathrm{rec}_F : \widehat{F}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$$

induit une suite exacte :

$$\prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_s/F) \longrightarrow 1$$

Alors il existe un groupe fini Δ, une suite de quotient Δ_s telle que $\Delta_s = \Delta$ pour s assez grand et une suite croissante d'entiers positifs $n(s)$ tels que :

$$\mathrm{Gal}(F_s/F) \xrightarrow{\sim} \Delta_s \times (\mathbb{Z}/p^{n(s)}\mathbb{Z})$$

Démonstration. La surjection

$$\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times \xrightarrow{\mathrm{rec}_F} \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \longrightarrow 1$$

montre que $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est isomorphe à un quotient de

$$\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times$$

donc que sa partie de torsion G_{tors} est finie. La conjecture de Leopoldt implique que $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)/G_{\mathrm{tors}}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang inférieur à 1. Le degré de F_∞/F étant non borné, le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)/G_{\mathrm{tors}}$ est de rang 1. Donc $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est de la forme :

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F) \xrightarrow{\sim} \Delta \times \mathbb{Z}_p$$

Le groupe de Galois de F_s/F est un quotient fini de $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. $\square$

1.2 Généralités sur les courbes de Shimura quaternioniques

1.2.1 Algèbre de quaternions et courbes de Shimura

Notations

Nous rassemblons ici les notations essentielles afférentes aux objets que nous étudions. Dans la mesure du possible, elles suivent [Nek04]. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers. Pour v une place de F, soit F_v le complété de F en v. Si v est finie, l'anneau des entiers de F_v est noté $\mathcal{O}_{F,v}$ et son uniformisante est notée ϖ_v. Nous notons $\mathbb{A}(F)$ l'anneau des adèles de F. Soit :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$$

Pour A un groupe abélien, soit $\widehat{A} = A \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$. Nous notons

$$\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}} : \widehat{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$$

l'application de réciprocité que nous normalisons afin que les uniformisantes s'envoient sur les morphismes de Frobenius géométriques et conservons ces conventions de notation pour toute extension L de $\mathbb{Q}$.

Soit $\{\tau_j \mid 1 \leq j \leq d\}$ l'ensemble des plongements réels $\tau_j : F \hookrightarrow \mathbb{R}$. Soit S_B un ensemble fini de places non-archimédiennes de F tel que :

$$|S_B| \equiv d - 1 \pmod 2$$

Soit $Ram(B) = \{\tau_j | j \neq 1\} \cup S_B$ et B l'unique algèbre de quaternions sur F dont l'ensemble de ramification est exactement $Ram(B)$. Pour j entre 1 et d, nous notons $B_{\tau_j} = B \otimes_{F,\tau_j} \mathbb{R}$. L'algèbre B est non-ramifiée en τ_1 donc B_{τ_1} est isomorphe à l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Nous fixons dans tout ce qui suit un isomorphisme ϕ de $\mathbb{R}$-algèbres entre B_{τ_1} et $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. L'isomorphisme ϕ induit un isomorphisme :

$$\phi \ : \ B_{\tau_1}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

En v une place finie de F où B ne ramifie pas, le groupe $B_v^\times$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Soit ϕ_v un isomorphisme non nécessairement fixé de $B_v^\times$ dans $\mathrm{GL}_2(F_v)$.

$$\phi_v \ : \ B_v^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(F_v)$$

Soit G le groupe algébrique réductif sur $\mathbb{Q}$ tel que $G(A) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times$ pour A une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative. Soit Z le centre de G et

$$nr : G(A) \longrightarrow (F \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times$$

sa norme réduite. L'algèbre B est centrale simple donc :

$$Z(\widehat{F}) = \widehat{F}^\times$$

Pour $1 \leq j \leq d$, nous notons

$$G_j = G \otimes_{F,\tau_j} \mathbb{R} \tag{1.2.1.1}$$

et

$$G_{\mathbb{R}} = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_d \tag{1.2.1.2}$$

Nous notons $G(\mathbb{R})$ le groupe des points réels de $G_{\mathbb{R}}$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

induit via l'isomorphisme ϕ une action de $B_{\tau_1}^\times = G_1(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, donc une action de $B^\times$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Soit h_0 le morphisme

$$\begin{aligned} h_0 \ : \quad \mathbb{S} \quad &\longrightarrow G(\mathbb{R}) \\ x + iy &\longmapsto \left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1 \right) \end{aligned}$$

et X sa classe de conjugaison sous l'action de $G(\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} X \quad &\longrightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ g h_0 g^{-1} &\longmapsto \quad g(i) \end{aligned}$$

est un isomorphisme analytique et définit donc une action de $B^\times$ sur X. Le couple (G, X) est la donnée de Shimura que nous considérons.

Soit H un sous-groupe compact ouvert de $\widehat{B}^\times$. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que H vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.2.1. *Le groupe H admet une décomposition de la forme :*

$$H = \prod_v H_v \subset \widehat{B}^\times$$

Le sous-groupe H_v de $B_v^\times$ est un sous-groupe compact ouvert maximal en toute place où B ramifie.

À un tel groupe H est associée une courbe de Shimura M_H sur $\mathrm{Spec}(F)$ dont la surface de Riemann M_H^{an} sur $\mathbb{C}$ est égale à :

$$M_H^{an} = (M_H \otimes_{F,\tau_1} \mathbb{C})(\mathbb{C}) = B^\times \backslash (X \times \widehat{B}^\times / H)$$

Pour $z \in X$ et $b \in \widehat{B}^{\times}$, nous désignons par $x = [z, b]_H$ un point de M_H^{an}. Lorsque le contexte apportera suffisamment d'informations, nous nous permettrons d'omettre l'indice H de l'écriture d'un point, en espérant que cela n'engendrera pas de difficulté particulière dans la lecture de ce texte.

Supposons maintenant donnée une tour de groupes $\{H_s\}_{s\geq 1}$ telle que

$$\forall\ s \geq 1,\ H_{s+1} \subset H_s$$

et telle que le groupe H_s vérifie l'hypothèse 1.2.1 pour tout s. Cette tour définit une tour de courbes de Shimura :

$$\{M_{H_s}\}_{s\geq 1}$$

Pour $H \subset H'$ deux groupes de cette tour, l'application

$$pr_{H,H'} : M_H \longrightarrow M_{H'}$$

est plate finie et correspond à l'application

$$\begin{array}{rccc} pr_{H,H'} : & M_H^{an} & \longrightarrow & M_{H'}^{an} \\ & [z, b]_H & \longmapsto & [z, b]_{H'} \end{array}$$

sur M_H^{an}. Si $B \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, les courbes M_H sont propres sur $\mathrm{Spec}(F)$. Dans le cas classique où $F = \mathbb{Q}$ et $S_B = \emptyset$, nos hypothèses impliquent que $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ et les courbes M_H admettent une compactification lisse par un nombre fini de pointes. Afin d'éviter d'alourdir les notations, nous notons également M_H la compactification de M_H, bien que ces deux objets puissent être différents dans le cas $F = \mathbb{Q}$. Les courbes M_H sont propres et lisses sur $\mathrm{Spec}(F)$.

Soit H un sous-groupe vérifiant l'hypothèse 1.2.1. Le groupe H est muni d'un endomorphisme involutif alt :

$$\begin{array}{rccc} alt : & H & \longrightarrow & H^{alt} \\ & b & \longmapsto & \prod_v b_v^{alt_v} \end{array} \tag{1.2.1.3}$$

L'application alt_v est définie localement comme suit :

$$b_v^{alt_v} = nr(b_v) b_v^{-1}$$

Soit $-alt$ la composée de alt et de l'inversion.

$$b_v^{-alt_v} = \frac{1}{nr(b_v)} b_v$$

Lorsque v n'appartient pas à S_B, un choix d'isomorphisme

$$\phi_v : B_v^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(F_v)$$

fournit une description explicite des morphismes alt_v et $-alt_v$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{alt_v} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-alt_v} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Actions sur $\{M_H\}$

La tour des $\{M_H\}$ est munie d'une action de $\widehat{B}^\times$ par multiplication à droite. L'élément $g \in \widehat{B}^\times$ définit un F-isomorphisme :

$$[\cdot g] : M_H \longrightarrow M_{g^{-1}Hg}$$

L'isomorphisme analytique sur M_H^{an} correspondant est donné par :

$$\begin{array}{rccl} [\cdot g] : & M_H^{an} & \longrightarrow & M_{g^{-1}Hg}^{an} \\ & [z,b] & \longmapsto & [z,bg] \end{array}$$

En particulier, le centre $Z(\widehat{F})$ de $\widehat{B}^\times$ agit sur M_H. L'isomorphisme

$$\widehat{F}^\times \xrightarrow{\sim} Z(\widehat{F}) \subset \widehat{B}^\times$$

définit donc une action de $\widehat{F}^\times$ sur M_H. Cette action se factorise à travers le quotient fini :

$$F^\times \backslash \widehat{F}^\times / (\widehat{F}^\times \cap H)$$

Nous appelons diamant cette action de $\widehat{F}^\times$ sur M_H et la notons $< \cdot >$. Le groupe H étant maximal en presque toute place, quitte à multiplier l'idèle a par un élément de $F^\times$, nous pouvons considérer que a appartient à $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ en toute place où H n'est pas maximal et en toute place de $Ram(B)$. Soit alors v une place finie de $Ram(B)$. Le groupe H_v est maximal donc $F_v^\times \cap H_v$ contient $\mathcal{O}_{F,v}^\times$. L'élément a_v appartient à $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ donc l'action locale $< a_v >$ est triviale. Soit maintenant v n'appartenant pas à $Ram(B)$ et telle que H_v ne soit pas maximal. L'algèbre B_v est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F_v)$ donc l'action locale $< a_v >$ sur M_H^{an} peut s'écrire :

$$< a_v > [z, b_v]_H = [z, b_v \begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}]_H$$

Soit enfin v n'appartenant pas à $Ram(B)$ et telle que H_v soit maximal. Comme plus haut, le groupe $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ est inclus dans $F_v^\times \cap H_v$ donc l'action locale de $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ est triviale. L'action locale $< a_v >$ dépend donc uniquement de la classe de l'uniformisante ϖ_v dans $F^\times \backslash \widehat{F}^\times / (\widehat{F}^\times \cap H)$. Ce groupe s'insère dans la suite exacte courte suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \longrightarrow & F^\times \backslash \widehat{\mathcal{O}}_F^\times / (\widehat{F}^\times \cap H) & \longrightarrow & F^\times \backslash \widehat{F}^\times / (\widehat{F}^\times \cap H) & \longrightarrow & F^\times \backslash \widehat{F}^\times / \widehat{\mathcal{O}}_F^\times & \longrightarrow 1 \\ & & & & & \Big\downarrow \wr & \\ & & & & & \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F) & \end{array}$$

Le groupe H est maximal en presque tout v donc le premier terme de cette suite est fini. Il en est donc de même pour $F^\times \backslash \widehat{F}^\times / (\widehat{F}^\times \cap H)$.

La courbe M_H est irréductible mais n'est pas nécessairement géométriquement irréductible sur F. Le morphisme structural

$$M_H \longrightarrow \mathrm{Spec}(F)$$

admet une factorisation de Stein :

$$M_H \longrightarrow \mathcal{M}_H \longrightarrow \mathrm{Spec}(F)$$

Le schéma $\mathcal{M}_H$ est fini étale sur $\mathrm{Spec}(F)$ et le morphisme $M_H \longrightarrow \mathcal{M}_H$ est propre et lisse à fibres géométriquement connexes. Pour Z un espace topologique, nous notons $\pi_0(Z)$ l'ensemble de ses composantes connexes.

$$\mathcal{M}_H(\overline{F}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(M_H \times_{\mathrm{Spec}(F)} \mathrm{Spec}(\overline{F})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(M_H(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(M_H^{an})$$

L'ensemble $\pi_0(M_H^{an})$ est muni d'une action transitive de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ qui se factorise à travers $\mathrm{Gal}(F(\mathcal{M}_H)/F)$ où $F(\mathcal{M}_H)$ est la clôture algébrique de F dans le corps de fonction de M_H. Soit $F_+^\times$ le sous-groupe des éléments totalement positifs de F. Soit :

$$\mathrm{rec}_F : \widehat{F}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$$

Nous conservons la convention que rec_F envoie les uniformisantes sur les morphismes de Frobenius géométriques. D'après [Del71] section 3.3 à 3.9 et [Mil05] section 12, l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, ou ce qui revient au même de $\mathrm{Gal}(F(\mathcal{M}_H)/F)$, admet alors la description explicite suivante. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. L'isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(F(\mathcal{M}_H)/F) \xrightarrow{\sim} F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / nr(H) \tag{1.2.1.4}$$

associe à σ un élément a de $F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / nr(H)$. La norme réduite induit une bijection :

$$nr : B_+^\times \backslash \widehat{B}^\times / H \xrightarrow{\sim} F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / nr(H)$$

Soit $b \in \widehat{B}^\times$ tel que $nr(b)$ soit égal à a. L'action de σ est alors donnée par la multiplication de b, indifféremment à gauche ou à droite puisque cette action se factorise à travers un groupe commutatif. Notons également que la courbe

$$M_H \otimes_F F(\mathcal{M}_H)$$

est munie d'une deuxième action de $\widehat{F}^\times$ via l'application de réciprocité.

Remarquons qu'en toute place v finie, l'image de H_v via nr est incluse dans le compact maximal de $F_v^\times$, donc dans $\mathcal{O}_{F,v}^\times$. Nous notons F_0 le corps de classe étroit de F, c'est-à-dire l'extension abélienne de F définie par :

$$F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / \widehat{\mathcal{O}}_F^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(F_0/F) \tag{1.2.1.5}$$

Le corps F_0 est isomorphe au corps des constantes de la courbe M_H pour H tel que nr soit surjective sur $\widehat{\mathcal{O}}_F^\times$.

Correspondances de Hecke

Soit H et H' deux sous-groupes compacts ouverts vérifiant l'hypothèse 1.2.1 et g un élément de $\widehat{B}^\times$. La correspondance de Hecke $[HgH']$ associée à g est définie par le diagramme commutatif suivant où les deux flèches verticales sont données par les projections $pr_{H\cap gH'g^{-1},H}$ et $pr_{g^{-1}Hg\cap H',H}$.

$$\begin{tikzcd} M_{H\cap gH'g^{-1}} \arrow[r, "{[\cdot g]}"] \arrow[d] & M_{g^{-1}Hg\cap H'} \arrow[d] \\ M_H \arrow[r, dashed, "{[HgH']}"] & M_{H'} \end{tikzcd}$$

Si g appartient au centre de $\widehat{B}^\times$, il s'envoie sur une idèle $a \in \widehat{F}^\times$ par l'isomorphisme de $Z(\widehat{F})$ dans $\widehat{F}^\times$ et l'action de $[HgH]$ coïncide avec celle de $<a>$. En général, nous choisissons des (g_i) formant un système de représentants de HgH'/H'. Alors :

$$HgH' = \coprod_i g_i H'$$

L'action de $[HgH']$ sur M_H^{an} en dehors des pointes est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} [HgH'] : \quad M_H^{an} &\longrightarrow M_{H'}^{an} \\ [z,b]_H &\longmapsto \sum_i [z, bg_i]_{H'} \end{aligned}$$

Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, nous donnons également le diagramme définissant $[Hg^{-1}H']$.

$$\begin{tikzcd} M_{H\cap g^{-1}H'g} \arrow[r, "{[\cdot g^{-1}]}"] \arrow[d] & M_{gHg^{-1}\cap H'} \arrow[d] \\ M_H \arrow[r, dashed, "{[Hg^{-1}H']}"] & M_{H'} \end{tikzcd} \tag{1.2.1.6}$$

Nous nous intéressons particulièrement aux correspondances de Hecke $T(v)$ pour v une place finie de F en laquelle B ne ramifie pas. Soit donc $v \notin Ram(B)$ finie. Soit ϕ_v un isomorphisme

$$\phi_v : B_v \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(F_v)$$

tel que l'image de H_v par ϕ_v soit un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$. Soit g_v un élément de $\mathcal{M}_2(\mathcal{O}_{F,v}) \cap \phi_v(B_v^\times)$ vérifiant $\mathrm{ord}_v\, nr(g_v) = 1$. Soit $g \in \widehat{B}^\times$ tel que la composante en v de g soit g_v et tel que g_w soit l'unité en dehors de v. La correspondance de Hecke $T(v)$ est alors la correspondance $[HgH]$:

$$T(v) = [HgH] \ : \ M_H \dashrightarrow M_H \tag{1.2.1.7}$$

Pour les places v appartenant à l'ensemble fini où H_v n'est pas maximal, il est possible que différents choix de g_v induisent différents choix de correspondances $T(v)$. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que nous avons effectué des choix explicites d'éléments g_v pour ces places-là. En règle générale, nous choisissons g_v via un plongement $\phi_v \ : \ H_v \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ et prenons :

$$\phi_v(g_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} \tag{1.2.1.8}$$

Plus généralement, soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ tel que les places divisant $\mathcal{I}$ ne soient pas des places de ramifications de B et tel que $v \mid \mathcal{I}$ implique $v^2 \nmid \mathcal{I}$. Soit :

$$T(\mathcal{I}) = \prod_{v|\mathcal{I}} T(v)$$

Les correspondances $T(\mathcal{I})$ et $<a>$ commutent pour tout $\mathcal{I}$ comme ci-dessus et tout $a \in \widehat{F}^\times$. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont premiers entre eux, $T(\mathcal{I})$ et $T(\mathcal{J})$ commutent.

1.2.2 Cohomologie

Formes et différentielles automorphes

Soit $G(\mathbb{A}) = \widehat{B}^\times \times G(\mathbb{R})$ le groupe des points adéliques de G et H un sous-groupe compact ouvert comme plus haut. Nous rappelons que :

$$G(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times G_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R})$$

Soit $G(\mathbb{R})^+$ et $PG(\mathbb{R})^+$ les sous-groupes de $G(\mathbb{R})$ définis par

$$G(\mathbb{R})^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times G_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R})$$

et

$$PG(\mathbb{R})^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R}) \times G_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R})$$

Soit $G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+$. Soit C un système de représentants de $G(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{A})/H$. Alors :

$$G(\mathbb{A}) = \coprod_{\alpha \in C} G(\mathbb{Q}) \cdot (G(\mathbb{R})^+ \times \alpha H)$$

Pour $\alpha \in C$, nous posons $\Gamma_\alpha = \alpha H \alpha^{-1} \cap G(\mathbb{Q})^+$ et $\overline{\Gamma}_\alpha$ l'image de Γ_α dans $PG(\mathbb{R})^+$.

Nous notons $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré.

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

Si $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, nous ajoutons à $\mathcal{H}$ le point à l'infini et les rationnels et nous notons toujours $\mathcal{H}$ l'ensemble obtenu afin d'alléger quelque peu les notations. L'application

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \coprod_{\alpha \in C} \overline{\Gamma}_\alpha \backslash \mathcal{H} & \longrightarrow & M_H^{an} \\ & \overline{\Gamma}_\alpha \cdot g(i) & \longmapsto & [g h_0 g^{-1}, \alpha]_H \end{array}$$

est un isomorphisme holomorphe.

Soit Ω^{an} le faisceau des 1-formes holomorphes et $\Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an})$ l'ensemble des 1-formes holomorphes globales sur M_H^{an}. L'isomorphisme précédent induit un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccl} \Psi^* : & \Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in C} \Gamma(\overline{\Gamma}_\alpha \backslash \mathcal{H}, \Omega^{an}) \\ & \omega & \longmapsto & (f_\alpha(z)dz)_{\alpha \in C} \end{array}$$

Soit $\mathcal{S}_2^H$ l'ensemble des fonctions

$$f : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que pour tout

$$\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A}), z_\infty \in Z(\mathbb{R}), \theta \in \mathbb{R}, g_j \in G_j(\mathbb{R})(j > 1), h \in H$$

la propriété d'invariance suivante soit vérifiée

$$f\left(\gamma g z_\infty \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, g_2, \cdots, g_d\right) h\right) = e^{-2i\theta} f(g) \tag{1.2.2.1}$$

et telles que la fonction

$$x + iy \longmapsto \frac{1}{y} f\left(g\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\right)\right)$$

soit holomorphe sur $\mathcal{H}$. Notons bien que nous exigeons l'holomorphie en chaque pointe dans le cas où $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Soit $j(g, z)$ la facteur d'automorphie défini par :

$$\begin{aligned} j : \quad \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} \quad &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times z \quad &\longmapsto (ad - bc)^{-1/2}(cz + d) \end{aligned}$$

Soit $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, $g^+ = (g_1^+, g_2, \cdots, g_d) \in G(\mathbb{R})^+$ et $h \in H$. Nous définissons

$$f_\omega : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par :

$$f_\omega(\gamma(g^+, \alpha h)) = j(g_1^+, g_1^+(i))^{-2} f_\alpha(g_1^+(i))$$

Cette construction définit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\alpha \in C} \Gamma(\overline{\Gamma}_\alpha \backslash \mathcal{H}, \Omega^{an}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_2^H \\ (f_\alpha(z)dz)_{\alpha \in C} &\longmapsto f_\omega \end{aligned}$$

L'espace $\varinjlim_H \Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an})$ (donc $\varinjlim_H \mathcal{S}_2^H$) est muni d'une action à gauche de $\widehat{B}^\times$ donnée par :

$$[\cdot g]^* : \Gamma(M_{g^{-1}Hg}^{an}, \Omega^{an}) \longrightarrow \Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an})$$

Sur $\mathcal{S}_2 = \bigcup_H \mathcal{S}_2^H$, l'action de $b \in \widehat{B}^\times$ est donnée par :

$$\forall g \in G(\mathbb{A}), \ ([\cdot b]^* \cdot f)(g) = f(gb) \tag{1.2.2.2}$$

Plus généralement, pour v une place finie de F, soit dg_v la mesure de Haar sur $B_v^\times$ normalisée afin que

$$\int_{H_v} dg_v = 1$$

pour H_v un compact maximal et soit dg la mesure sur $\widehat{B}^\times$ définie par :

$$dg = \prod_v dg_v$$

Soit $\alpha\ : \widehat{B}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact. L'action (1.2.2.2) définit une action de α donnée par :

$$\forall g \in G(\mathbb{A}),\ (\alpha \cdot f)(g) = \int_{\widehat{B}^\times} \alpha(h) f(gh) dh \tag{1.2.2.3}$$

En particulier, $\mathbb{1}_{HbH'}$ agit sur $\mathcal{S}_2$ comme suit :

$$\begin{array}{llll} \mathbb{1}_{HbH'} : & \mathcal{S}_2^{H'} & \longrightarrow & \mathcal{S}_2^{H} \\ & f & \longmapsto & \left(g \mapsto \displaystyle\int_{HbH'} f(gh) dh \right) \end{array}$$

En toute généralité, nous appelons algèbre de Hecke la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions de $\widehat{B}^\times$ dans $\mathbb{C}$ localement constantes à support compact munie du produit de convolution.

Réalisations cohomologiques

Nous considérons les réalisations cohomologiques de Betti, de de Rham et étale de M_H. Soit :

$$\mathcal{W}_B(H) = H_B^1(M_H^{an}, \mathbb{Q})$$

Et :

$$\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H) = \Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an})$$

Le théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et de de Rham fournit un isomorphisme :

$$\mathcal{W}_B(H) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H) \oplus \overline{\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)}$$

Le cup-produit donne un accouplement non-dégénéré sur $\mathcal{W}_B(H)$:

$$< \cdot, \cdot >_{\mathbb{Q}}\ :\ \mathcal{W}_B(H) \times \mathcal{W}_B(H) \longrightarrow H^2(M_H^{an}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Q}(-1) \tag{1.2.2.4}$$

Son extension à $\mathbb{C}$ donne un accouplement non-dégénéré sur $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)$.

$$< \cdot, \cdot >_{\mathbb{C}}\ :\ \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H) \times \overline{\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)} \longrightarrow H^2(M_H^{an}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{C} \tag{1.2.2.5}$$

Soit l un nombre premier, L une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ et $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Soit

$$\mathcal{W}_l(H) = H^1_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

le groupe de cohomologie. Comme précédemment, le cup-produit donne un accouplement non-dégénéré

$$< \cdot, \cdot >_l \ : \ \mathcal{W}_l(H) \times \mathcal{W}_l(H) \longrightarrow H^2_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \qquad (1.2.2.6)$$

dont l'extension à L coïncide avec l'extension de $< \cdot, \cdot >_{\mathbb{Q}}$ à L. Nous remarquons que M_H n'est en général pas connexe donc que la dernière flèche de (1.2.2.6) n'est en général pas un isomorphisme.

Nous désignons simplement par $\mathcal{W}(H)$ l'un des trois groupes de cohomologie $\mathcal{W}_B(H)$, $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)$ et $\mathcal{W}_l(H)$ lorsqu'il n'y a pas lieu de les distinguer.

Les correspondances de Hecke introduites dans la sous-section 1.2.1 définissent des morphismes de groupes de cohomologies $[HgH']_*$, $[HgH']^*$, $T(\mathcal{I})_*$, $T(\mathcal{I})^*$, $< a >_*$ et $< a >^*$. Remarquons en particulier que $[HgH]_*$ et $[HgH]^*$ sont définis par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}(H \cap gHg^{-1}) \arrow[r, "{[\cdot g]_*}"] & \mathcal{W}(g^{-1}Hg \cap H) \arrow[d, "pr_*"] \\ \mathcal{W}(H) \arrow[u, "pr^*"] \arrow[r, "{[HgH]_*}"] & \mathcal{W}(H) \end{tikzcd} \qquad (1.2.2.7)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}(g^{-1}Hg \cap H) \arrow[r, "{[\cdot g]^*}"] & \mathcal{W}(H \cap gHg^{-1}) \arrow[d, "pr_*"] \\ \mathcal{W}(H) \arrow[u, "pr^*"] \arrow[r, "{[HgH]^*}"] & \mathcal{W}(H) \end{tikzcd} \qquad (1.2.2.8)$$

La comparaison des diagrammes (1.2.2.8) et (1.2.1.6) montre que :

$$[HgH]_* = [Hg^{-1}H]^* \qquad (1.2.2.9)$$

L'isomorphisme

$$\varinjlim_H \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H) = \varinjlim_H \Gamma(M_H^{an}, \Omega^{an}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_2 \qquad (1.2.2.10)$$

de la sous-section 1.2.2 est équivariant sous l'action de $\widehat{B}^\times$. L'application

$$[HgH']^* \ : \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H') \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)$$

agit comme l'application :

$$\begin{aligned} [HgH']^* : \ \mathcal{S}_2(H') &\longrightarrow \mathcal{S}_2(H) \\ f &\longmapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(H')}(\mathbb{1}_{HgH'} \cdot f) \end{aligned} \qquad (1.2.2.11)$$

La dualité de Poincaré (1.2.2.5) induit sur $\mathcal{S}_2^H$ un accouplement hermitien. Soit $Z_\infty K_\infty^+$ l'ensemble

$$Z_\infty K_\infty^+ = \left\{ z_\infty \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, g_2, \cdots, g_d \right) | z_\infty \in Z(\mathbb{R}), \theta \in \mathbb{R}, g_j \in G_j(\mathbb{R}) \right\}$$

A un facteur de proportionnalité près, l'accouplement $< \cdot, \cdot >_{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{S}_2^H$ est donné par :

$$< f_1, f_2 >_{\mathbb{C}} = \int\limits_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/Z_\infty K_\infty^+} f_1(g)\overline{f_2(g)}dg$$

Soit $\alpha\ : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact.

$$\begin{aligned} < \alpha \cdot f_1, f_2 >_C &= \int\limits_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/Z_\infty K_\infty^+} \int_{\widehat{B}^\times} \alpha(h) f_1(gh)\overline{f_2(g)}dgdh \\ &= \int\limits_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/Z_\infty K_\infty^+} \int_{\widehat{B}^\times} f_1(g)\overline{\overline{\alpha(h)} f_2(gh^{-1})}dgdh \\ &= < f_1, {}^t\alpha \cdot f_2 >_C \end{aligned}$$

Donc ${}^t\alpha(h) = \overline{\alpha(h^{-1})}$. En particulier :

$$\forall\ g \in \widehat{B}^\times < \mathbb{1}_{HgH'} \cdot f_1, f_2 >_{\mathbb{C}} = < f_1, \mathbb{1}_{H'g^{-1}H} \cdot f_2 >_{\mathbb{C}} \tag{1.2.2.12}$$

Les compatibilités entre les accouplements de Poincaré sur $\mathcal{W}_B(H)$, $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(H)$ et $\mathcal{W}_l(H)$ ainsi que les relations (1.2.2.9), (1.2.2.11) et (1.2.2.12) nous permettent d'énoncer les résultats suivants valables pour l'une quelconque de nos réalisations cohomologiques :

$$\forall\ g \in \widehat{B}^\times\ \forall\ (x, y) \in \mathcal{W}(H)^2 < [HgH]_* x, y > = < x, [HgH]^* y > \tag{1.2.2.13}$$

$$\forall\ a \in \widehat{F}^\times\ \forall\ (x, y) \in \mathcal{W}(H)^2 << a >_* x, y > = < x, < a >^* y > \tag{1.2.2.14}$$

1.3 Jacobiennes et formes modulaires de Hilbert

1.3.1 Jacobiennes et algèbre de Hecke

Dans cette courte section, nous faisons quelques remarques préliminaires sur la jacobienne de la courbe M_H et sur les représentations galoisiennes apparaissant dans sa cohomologie étale. Nous suivons toujours [Nek04].

Pour H un sous-groupe compact ouvert vérifiant l'hypothèse 1.2.1, nous rappelons que $F(\mathcal{M}_H)$ est la clôture algébrique de F dans le corps de fonction de M_H et nous notons $J(H)$ la jacobienne de M_H, c'est-à-dire la variété abélienne :

$$J(H) = \mathrm{Res}_{F(\mathcal{M}_H)/F}\, Pic^\circ(M_H/F(\mathcal{M}_H))$$

Le foncteur $Pic^\circ(\cdot/F(\mathcal{M}_H))$ est contravariant et covariant pour les morphismes propres plats finis de courbes lisses sur $\mathrm{Spec}(F)$. Les définitions et résultats des sous-sections 1.2.1 et 1.2.2 s'étendent à $J(H)$ et nous disposons donc de morphismes

$$[HgH]_* : J(H) \longrightarrow J(H)$$
$$[HgH]^* : J(H) \longrightarrow J(H)$$

pour tout $g \in \widehat{B}^\times$. D'après l'équation (1.2.2.9) :

$$[HgH]_* = [Hg^{-1}H]^*$$

La variété abélienne $J(H)$ est canoniquement principalement polarisée et l'involution de Rosati ι admet la compatibilité suivante avec les morphismes $[HgH]_*$:

$$\iota([HgH]_*) = [HgH]^*$$

Nous reprenons les notations de la sous-section 1.2.1 et en particulier le choix donné par l'équation (1.2.1.8). Nous nous intéressons à l'action de la sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(J(H))$ engendrée par les $T(v)$ pour $v \notin Ram(B)$ et par les $<a>$ pour $a \in \widehat{F}^\times$ que nous faisons agir de façon covariante sur $J(H)$. Nous notons $\mathfrak{h}(H)$ cette algèbre. Soit S un ensemble fini de places contenant S_B tel que H soit un compact maximal en dehors de S. Soit $\mathfrak{h}(H)^S$ la sous-algèbre de $\mathfrak{h}(H)$ engendrée par les opérateurs $T(v)$ et les $<a>$ pour $v \notin S$. Plus généralement, nous serons amenés dans ce qui suit à faire agir $\mathfrak{h}(H)$ et $\mathfrak{h}(H)^S$ sur différents ensembles, parfois de façon covariante, parfois de façon contravariante. Nous conserverons dans ces situations les noms de $\mathfrak{h}(H)$ et $\mathfrak{h}(H)^S$.

Les $\mathbb{Z}$-modules $\mathfrak{h}(H)$ et $\mathfrak{h}(H)^S$ sont libres de rangs finis. Soit $v \notin S$.

$$H_v \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} H_v = H_v \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} H_v$$

donc

$$T(v)_* = [Hb_vH]_* = [H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} H]_* = [H \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H]_*$$

et donc :

$$\iota(T(v)_*) = [Hb_vH]^* = [Hb_v^{-1}H]_* = <\varpi_v^{-1}>_* T(v)_*$$

L'algèbre $\mathfrak{h}(H)^S$ est donc stable sous l'involution ι. La positivité de l'involution de Rosati implique qu'il existe un ensemble d'indices $J = J_1 \cup J_2$ vérifiant les propriétés suivantes. La $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathfrak{h}(H)^S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est isomorphe à un produit fini de corps de nombres.

$$\mathfrak{h}(H)^S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} L_j$$

Chaque facteur L_j est ι-stable. Si $j \in J_1$, le corps L_j est totalement réel et ι agit trivialement sur L_j. Si $j \in J_2$, le corps L_j est CM et ι agit comme la conjugaison complexe.

Pour $j \in J$, on note θ_j le morphisme

$$\theta_j : \mathfrak{h}(H)^S \longrightarrow L_j$$

défini par la composition de l'inclusion de $\mathfrak{h}(H)^S$ dans $\mathfrak{h}(H)^S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et de la surjection sur L_j.

Soit π une représentation complexe cuspidale irréductible unitaire des points adéliques $(B \otimes \mathbb{A})^\times$ de $B^\times$. Nous remarquons que la condition de cuspidalité est automatique sauf si $F = \mathbb{Q}$. La représentation π s'écrit $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ où π_∞ et π_f désignent les composantes archimédiennes et non-archimédiennes. Nous supposons d'une part que π_∞ induit la série discrète holomorphe de poids 2 sur $G_1(\mathbb{R})$ et la représentation triviale sur $G_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_2(\mathbb{R})$ et d'autre part que $\pi_f^H \neq 0$. Soit ω_π le caractère central de π. L'algèbre de Hecke agit sur π_f^H par un morphisme

$$\lambda_\pi : \mathfrak{h}(H)^S \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui se factorise en

$$\mathfrak{h}(H)^S \xrightarrow{\theta_j} L_j \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$$

pour un unique couple

$$(j, \sigma) \in J \times \mathrm{Hom}(L_j, \mathbb{C})$$

La correspondance de Jacquet-Langlands envoie π sur une représentation cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ associée à une forme modulaire de Hilbert f_π de poids parallèles pairs $(2, \cdots, 2)$ sur F. Soit $\lambda | l$ un premier de L_j, $L_{j,\lambda} = (L_j)_\lambda$ le complété de L_j en λ et $\mathcal{O}_{j,\lambda}$ l'anneau des entiers de $L_{j,\lambda}$. A f_π est associée une représentation galoisienne continue $T_\lambda(\theta_j)$ de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ de rang 2 à coefficients dans $\mathcal{O}_{j,\lambda}$, irréductible, non-ramifiée en dehors de $S_B \cup \{\lambda\}$ et vérifiant la propriété suivante :

$$\det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)_{geom} | T_\lambda(\theta_j)) = 1 - \theta_j(T(v))X + \omega_\pi(\varpi_v)(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)X^2 \qquad (1.3.1.1)$$

Réciproquement, à $(j, \sigma) \in J \times \mathrm{Hom}(L_j, \mathbb{C})$ est associée une unique représentation cuspidale irréductible unitaire $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ de $(B \otimes \mathbb{A}(F))^\times$ vérifiant les mêmes conditions que plus haut et donc une représentation galoisienne $T_\lambda(\theta_j)$.

Soit $(j, \sigma) \in J \times \mathrm{Hom}(L_j, \mathbb{C})$. La représentation $T_\lambda(\theta_j)$ apparaît dans la cohomologie étale de M_H au sens suivant. Soit $V_\lambda(\theta_j) = T_\lambda(\theta_j) \otimes L_{j,\lambda}$. Il existe des entiers a_j pour $j \in J$ tel que le $\mathfrak{h}(H)^S[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module $H^1_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathbb{Q}_l)$ vérifie la décomposition suivante :

$$H^1_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j \in J} \left(\bigoplus_{\lambda | l} V_\lambda(\theta_j) \otimes_{L_j,\lambda} \bar{\mathbb{Q}}_l \right)^{a_j} \qquad (1.3.1.2)$$

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_l$. Supposons $F \neq \mathbb{Q}$. Soit $v \notin S_B$ une place finie de F de corps résiduel k_v, de caractéristique résiduelle différente de l et telle que H_v soit maximale. D'après [Car86] et [CV05], il existe alors un modèle régulier M_H de M_H propre et lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,v})$. Si maintenant $F = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, l'interprétation de M_H comme problème de module fournit un modèle régulier M_H de M_H sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,v})$. Soit

$$\mathrm{M}_H^{spe} = \mathrm{M}_H \otimes_{\mathcal{O}_{F,v}} k_v$$

la fibre spéciale de M_H. D'après le théorème du changement de base propre et lisse, il existe un isomorphisme canonique :

$$H^1_{et}(M_H^{spe} \otimes_{k_v} \bar{k}_v, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

La correspondance de Hecke $T(v)$ s'étend naturellement à M_H donc son graphe s'étend naturellement en tant que diviseur sur $M_H \times_F M_H$ en un diviseur sur $\mathrm{M}_H \times_{\mathcal{O}_{F,v}} \mathrm{M}_H$. Soit $T(v)^{spe} \subset \mathrm{M}_H^{spe} \times_{k_v} \mathrm{M}_H^{spe}$ sa fibre spéciale. Soit $\mathrm{Fr}(v)$ le graphe du morphisme de Frobenius sur M_H^{spe} et $< \varpi_v >$ celui du morphisme diamant pour une uniformisante de $\mathcal{O}_{F,v}$. La relation d'Eichler-Shimura énonce alors que :

$$T(v)^{spe} = \mathrm{Fr}(v) + < \varpi_v >{}^t\mathrm{Fr}(v) \tag{1.3.1.3}$$

1.3.2 Application d'Abel-Jacobi p-adique

Nous rappelons la définition et certaines propriétés de l'application d'Abel-Jacobi. Les résultats que nous énonçons proviennent de [Nek00] et de la section 2 de [Wes02] afin de traiter le cas de groupes de cohomologie à coefficients entiers. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit X une variété propre et lisse sur un corps de nombres K et $\bar{X} = X \times_K \bar{K}$. Soit $CH^n(X)$ le n-ième groupe de Chow de X, c'est-à-dire le groupe des cycles algébriques de codimension n modulo équivalence rationnelle. Pour K un corps, $\bar{K}$ une clôture séparable de K et T un $\mathcal{O}$-module muni d'une action continue de K, nous notons $H^1(K, T)$ le groupe de cohomologie galoisienne continue $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), T)$. Pour L/K une extension de K, nous notons $H^1(L/K, T)$ le groupe de cohomologie continue $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), T)$.

L'application classe de cycles est une application :

$$cl_X : CH^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow H^{2n}_{et}(X, \mathcal{O}(n))$$

La suite spectrale d'Hochschild-Serre induit alors des applications :

$$cl_{0,X} : CH^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow H^0(K, H^{2n}_{et}(\bar{X}, \mathcal{O})(n))$$

$$cl_{1,X} : \ker(cl_{0,X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow H^1(K, H^{2n-1}_{et}(\bar{X}, \mathcal{O})(n))$$

L'application $cl_{1,X}$ est l'application d'Abel-Jacobi p-adique et est notée Φ dans ce qui suit. En particulier, pour M une courbe propre et lisse et $n = 1$:

$$cl_{0,M} : CH^1(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow H^0(K, H^2_{et}(\bar{M}, \mathcal{O})(1))$$

$$\Phi : \ker(cl_{0,M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow H^1(K, H^1_{et}(\bar{M}, \mathcal{O})(1))$$

L'application d'Abel-Jacobi p-adique est compatible aux correspondances de M et à l'action de Galois.

1.3.3 Formes modulaires de Hilbert

Définitions

Nous rappelons dans la sous-section 1.3.3 quelques faits importants au sujet des formes modulaires de Hilbert. Soit $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ des idéaux non-nuls de $\mathcal{O}_F$. Soit $U_0(\mathcal{N})$, $U_1(\mathcal{N})$ et $U_{1,0}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ les sous-groupes compacts ouverts de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_F)$ définis par :

$$\begin{aligned}
U_0(\mathcal{N}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_F) \mid c \equiv 0 \bmod \mathcal{N} \right\} \\
U_1(\mathcal{N}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_F) \mid c,\ a-1 \equiv 0 \bmod \mathcal{N} \right\} \\
U_{1,0}(\mathcal{N},\mathcal{N}') &= U_0(\mathcal{N}) \cap U_1(\mathcal{N}')
\end{aligned}$$

Soit en particulier p un nombre premier impair et $\mathcal{N}$ un idéal premier à (p). Soit :

$$P = \prod_{v|p} v$$

Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ est l'exemple paradigmatique de sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_F)$ qui nous intéresse ici.

Soit $K_\infty = \prod_{v|\infty} SO(2)$. Un élément $k_\infty \in K_\infty$ s'écrit $k_\infty = (r(\theta_v))_{v|\infty}$ avec :

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $\rho(k_\infty) = \prod_{v|\infty} e^{-i\theta_v}$. Soit Z le centre de GL_2 et

$$Z(F \otimes \mathbb{R}) = \prod_{v|\infty} Z(F_v)$$

identifié avec $(F \otimes \mathbb{R})^\times$. Pour z_∞ un élément de $Z(F \otimes \mathbb{R})$, nous posons $sgn(z_\infty) = \prod_{v|\infty} sgn(z_v)$. Nous notons $x_\infty = (x_v)_{v|\infty}$ et $|x_\infty| = \prod_{v|\infty} |x_v|$.

Soit k un entier supérieur à 1. Une forme modulaire f de poids parallèles k et de niveau $U_1(\mathcal{N})$ est une fonction continue

$$f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}(F)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que pour tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2 F$, $z_\infty \in Z(F \otimes \mathbb{R})$, $u \in U_1(\mathcal{N})$, $k_\infty \in K_\infty$

$$f(\gamma z_\infty g u k_\infty) = \rho(k_\infty)^k sgn(z_\infty)^k f(g)$$

et telle que pour $g^\infty \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$, la fonction

$$x_\infty + iy_\infty \longmapsto |y_\infty|^{-k/2} f(\begin{pmatrix} y_\infty & x_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^\infty)$$

soit holomorphe en les variables $x_\infty + y_\infty$ et bornée quand $|y_v|_v$ tend vers $+\infty$. Si de plus

$$x_\infty + iy_\infty \longmapsto |y_\infty|^{-k/2} f(\begin{pmatrix} y_\infty & x_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^\infty)$$

tend vers zéro quand $|y_v|$ tend vers $+\infty$, la forme f est dite parabolique. Nous notons $S_k(U_1(\mathcal{N}))$ l'ensemble des formes paraboliques de poids parallèles k et de niveau $\mathcal{N}$. Le lecteur pourra comparer cette définition avec celle de $\mathcal{S}_2^H$ donnée en (1.2.2.1).

L'ensemble $S_k(U_1(\mathcal{N}))$ est muni d'une action du groupe de classes $I_{\mathcal{N}\infty}$ de rayon $\mathcal{N} \prod_{v|\infty} v$

$$I_{\mathcal{N}\infty} = F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / (1 + \mathcal{N})$$

donnée par :

$$(b \cdot f)(g) = f(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} g)$$

Soit ω un caractère

$$\omega : I_{\mathcal{N}\infty} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

vérifiant

$$\forall\ v|\infty, \quad \omega_v(-1) = (-1)^k$$

Nous notons $S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ l'ensemble des formes modulaires paraboliques telles que l'action de $I_{\mathcal{N}\infty}$ se fasse via le caractère ω.

Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $S_k(U_1(\mathcal{N}))$ et $S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ sont munis d'une action contravariante de la sous-algèbre de l'algèbre des fonctions de $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ dans $\mathbb{C}$ localement constantes à support compact engendrée sur $\mathbb{C}$ par :

$$[U_1(\mathcal{N}) \backslash \mathrm{GL}_2(\widehat{F}) / U_1(\mathcal{N})]$$

Nous rappelons que l'action de l'opérateur

$$T(v) = [U_1(\mathcal{N}) g_v U_1(\mathcal{N})]^*$$

est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} T(v) : \quad S_k(U_1(\mathcal{N})) &\longrightarrow S_k(U_1(\mathcal{N})) \\ f \quad &\longmapsto \frac{(N_{F/\mathbb{Q}} v)^{k/2-1}}{\mathrm{vol}(U_1(\mathcal{N}))} (\mathbb{1}_{U_1(\mathcal{N}) g_v U_1(\mathcal{N})} \cdot f) \end{aligned} \tag{1.3.3.1}$$

Nous étudions en particulier les actions des sous-algèbres $\mathfrak{h}(U_1(\mathcal{N}))$ et $\mathfrak{h}(U_1(\mathcal{N}))^{\mathcal{N}}$. Une forme parabolique f est dite propre en dehors de $\mathcal{N}$ s'il existe une application

$$\lambda_f : \mathfrak{h}(U_1(\mathcal{N}))^{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que nous appelons système de valeurs propres de f telle que

$$T(v)f = \lambda_f(T(v))f$$

pour tout $T(v) \in \mathfrak{h}(U_1(\mathcal{N}))^{\mathcal{N}}$. Soit $f \in S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ une forme modulaire de Hilbert parabolique propre en dehors de $\mathcal{N}$ et λ_f son système de valeurs propres. S'il n'existe pas de $f' \in S_k(U_1(\mathcal{N}'), \omega)$ propre en dehors de $\mathcal{N}'$ avec $\mathcal{N}'|\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}' \neq \mathcal{N}$ telle que

$$\forall\, v \nmid \mathcal{N},\ T(v)f' = \lambda_f(T(v))f'$$

alors f est dite nouvelle. Si f est nouvelle, f est également propre pour les opérateurs de Hecke $T(v)$ pour $v \mid \mathcal{N}$.

Soit f une forme nouvelle de niveau $\mathcal{N}$ et $\chi : \widehat{F}^\times/F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère d'ordre fini et de conducteur $\operatorname{cond}\chi$. A multiplication par un scalaire près, il existe alors une unique forme g de niveau divisant $\mathcal{N}(\operatorname{cond}\chi)^2$ propre en dehors de $\operatorname{cond}\chi$ dont le système de valeurs propres est donné par :

$$\lambda_f(v) = \chi(\varpi_v)\lambda_f(T(v))$$

Nous notons cette forme $f \otimes \chi$.

Représentation galoisienne

Soit $k > 0$ et p un nombre premier impair. Soit $i_\infty : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $i_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ des plongements fixés. Soit $f \in S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ une forme parabolique propre en dehors de $\mathcal{N}$. Il existe un corps de nombre L que nous fixons tel que L contienne l'image de ω et du système de valeurs propres λ_f. Soit $\mathfrak{p}|p$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_L$ déterminé par i_p. A f est associée une représentation galoisienne continue $V(f)$ de $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ de rang 2 à coefficients dans $L_\mathfrak{p}$:

$$\rho_f : \operatorname{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \operatorname{Aut}(V(f))$$

La représentation $V(f)$ est absolument irréductible, non-ramifiée en dehors de $\mathcal{N}(p)$ et vérifie la propriété suivante pour tout $v \nmid \mathcal{N}(p)$.

$$\det(1 - X\operatorname{Fr}(v)_{geom}|V(f)) = 1 - \lambda_f(T(v))X + \omega(\varpi_v)(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)^{k-1}X^2 \quad (1.3.3.2)$$

Si χ est un caractère d'ordre fini de $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$, la représentation $V(f \otimes \chi)$ associée à $f \otimes \chi$ est égale à $V(f) \otimes \chi$.

D'après l'équation (1.3.3.2), le déterminant de $V(f)$ est isomorphe à

$$L_\mathfrak{p}(1-k) \otimes \omega$$

La représentation duale

$$V(f)^*(1) = \operatorname{Hom}(V(f), L_\mathfrak{p}(1))$$

de $V(f)$ est donc donnée par :

$$V(f)^*(1) = V(f)(k) \otimes \omega^{-1}$$

En particulier, si f est de poids 2 et de caractère trivial, $V(f)(1)$ est auto-duale.

Quitte à faire un choix non-canonique de réseau stable par $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, il est possible de construire une représentation galoisienne continue $T(f)$ de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$:

$$\rho_{f,\mathcal{O}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T(f))$$

La représentation $T(f)$ est de rang 2 à coefficients dans $\mathcal{O}_{L,\mathfrak{p}}$, irréductible, non-ramifiée en dehors de $\mathcal{N}(p)$ et vérifie la propriété suivante pour tout $v \nmid \mathcal{N}(p)$:

$$\det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)_{geom}|T(f)) = 1 - \lambda_f(T(v))X + \omega(\varpi_v)(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)^{k-1}X^2$$

Ce résultat est à comparer avec les assertions (1.3.1.1) et (1.3.1.2). La donnée d'un réseau stable par $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, donc d'une représentation $T(f)$, définit

$$\bar{\rho}_f : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T(f)/\mathfrak{p}T(f))$$

une représentation $T(f)/\mathfrak{p}T(f)$ à coefficients dans le corps résiduel de $\mathcal{O}_{L,\mathfrak{p}}$. Si cette représentation est absolument irréductible pour un choix de réseau, elle l'est pour tous et la représentation résiduelle ne dépend pas du choix du réseau. Sous l'hypothèse que $\bar{\rho}_f$ est absolument irréductible, il est donc loisible de parler de la représentation résiduelle de f.

Représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}(F))$

Soit k un entier strictement positif. Soit $f \in S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ une forme modulaire parabolique propre en dehors de $\mathcal{N}$. La représentation régulière de

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_2(\mathrm{F} \otimes \mathbb{R})) \times \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathrm{F}})$$

sur f lui associe une représentation automorphe irréductible $\pi(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}(F))$. Nous écrivons $\pi(f) = \otimes'_v \pi(f)_v$. La représentation $\pi(f)$ est de caractère central ω. Nous rappelons qu'en une place v finie, la représentation locale $\pi(f)_v$ de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ est d'un des trois types suivants : série principale, spéciale ou supercuspidale.

Nous conservons les notations de la sous-section 1.2.1 et rappelons en particulier que S_B est l'ensemble des places finies où B ramifie. Supposons que pour tout $v \in S_B$, le type de la représentation $\pi(f)_v$ ne soit pas de type série principale. Il existe alors une représentation automorphe irréductible π du groupe $(B \otimes \mathbb{A}(F))^\times$ telle que pour tout $v \notin Ram(B)$:

$$\pi_v \xrightarrow{\sim} \pi(f)_v$$

Nous disons dans cette situation que la représentation $\pi(f)_v$ est dans l'image de la correspondance de Jacquet-Langlands. Si de plus la forme f est de poids 2, la représentation galoisienne $T(f)$ associée à f intervient dans la cohomologie étale de $M_{U_1(\mathcal{N})}$ au sens de la sous-section 1.3.1 et de (1.3.1.2).

Proposition 1.3.1. *Soit k un entier pair strictement positif. Soit f appartenant à $S_k(U_1(\mathcal{N}), \omega)$ une forme modulaire parabolique propre en dehors de $\mathcal{N}$. Soit $\pi(f)$ et $V(f)$ la représentation automorphe et la représentation galoisienne qui sont associées à f. Soit v une place finie de F ne divisant pas (p), G_{F_v} le groupe de décomposition en v et I_v le groupe d'inertie. Soit* $\mathrm{Fr}(v)$ *un relèvement à G_{F_v} du morphisme de Frobenius en v.*

Alors les deux valeurs propres de $\mathrm{Fr}(v)$ *agissant sur $V(f)$ sont des nombres de Weil de poids $(k-1, k-1)$ si $\pi(f)_v$ n'est pas spéciale et de poids $(k, k-2)$ si $\pi(f)_v$ est spéciale. Autrement dit, la norme d'une valeur propre de* $\mathrm{Fr}(v)$ *vérifie :*

$$|\lambda| = |N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v|^{\frac{k-1}{2}} \text{ ou } |\lambda| = |N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v|^{\frac{k}{2}} \text{ ou } |\lambda| = |N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v|^{\frac{k-2}{2}}$$

En particulier, soit E_w une extension finie de F_v et

$$\psi : \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/E_w) \longrightarrow L_{\mathfrak{p}}$$

un caractère d'ordre fini. Si $\pi(f)_v$ n'est pas spéciale, alors $H^i(E_w, V(f)(j) \otimes \psi)$ est nul pour tout i et tout j. Si $\pi(f)_v$ est spéciale, alors $H^i(E_w, V(f)(j) \otimes \psi)$ est nul pour tout i et tout j différent de $k/2 \pm 1$.

Démonstration. Il s'agit du théorème 12.4.8.2 et de la proposition 12.4.8.4 de [Nek06]. □

Les résultats des deux sous-sections précédentes proviennent d'un travail collectif considérable. Citons les contributions d'Eichler, Shimura, Deligne, Carayol, Ohta, Rogawski-Tunnell, Wiles, Taylor, Blasius-Rogawski.

1.4 Tours de courbes de Shimura

1.4.1 Les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$

Définitions

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ premier à S_B. Soit p un nombre premier rationnel impair tel que l'idéal $(p) = p\mathcal{O}_F$ soit premier à $\mathcal{N}$ et S_B. Soit :

$$P = \prod_{v|p} v$$

Soit s un entier supérieur à 1. En une place finie v divisant (p), le groupe $B_v^\times$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Soit $D_{1,0} = (D_{1,0}(v))_v$ la donnée des objets suivants :

1. Soit v appartient à S_B. La donnée $D_{1,0}(v)$ est la donnée d'un sous-groupe compact ouvert maximal $H(v)$ de $B_v^\times$.

2. Soit v ne divise pas $\mathcal{N}(p)$. La donnée $D_{1,0}(v)$ est la donnée d'un $\mathcal{O}_{F,v}$-ordre maximal $R(v)$ de B_v.
3. Soit v divise $\mathcal{N}(p)$. La donnée $D_{1,0}(v)$ est la donnée d'un quadruplet

$$(R(v), M(v), L(v), D(v))$$

où $R(v)$ est un $\mathcal{O}_{F,v}$-ordre maximal de B_v, $M(v)$ est un B_v-module simple de dimension 2 sur F_v, $L(v)$ est un $\mathcal{O}_{F,v}$-réseau de $M(v)$ stable sous l'action de $R(v)$ et $D(v)$ est un $\mathcal{O}_{F,v}$-sous-module de $L(v)$ libre de rang 1 tel que $L(v)/D(v)$ est également libre de rang 1.

Concrètement, la donnée $D_{1,0}(v)$ en $v|\mathcal{N}(p)$ est la donnée d'un réseau entier et d'une droite de ce réseau. Nous considérons les tours de sous-groupes compacts ouverts de $\widehat{B}^\times$

$$\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$$
$$\{U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$$
$$\{U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$$

définies par les conditions des définitions 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3.

Définition 1.4.1. *La tour*

$$\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)(D_{1,0}(v))\}_{s\geq 1}$$

associée à la donnée $D_{1,0}(v)$ est la tour de sous-groupes compacts ouverts

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$$

définis par les conditions locales suivantes :

1. *Soit v appartient à S_B. Alors $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = H(v)$.*
2. *Soit v ne divise pas $\mathcal{N}(p)$. Alors $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = R(v)^\times$.*
3. *Soit v divise $\mathcal{N}$ et $\mathrm{ord}_v \mathcal{N} = n$. Alors $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est inclus dans $R(v)^\times$ donc agit sur $L(v)$. Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est le stabilisateur de $D(v)/\varpi_v^n D(v)$.*
4. *Soit v divise (p). Alors $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est inclus dans $R(v)^\times$ donc agit sur $L(v)$. Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est le fixateur de $D(v)/\varpi_v^s D(v)$.*

Définition 1.4.2. *La tour*

$$\{U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)(D_{1,0}(v))\}_{s\geq 1}$$

associée à la donnée $D_{1,0}(v)$ est la tour de sous-groupes compacts ouverts

$$U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

définis par les conditions locales suivantes :

1. *Soit v ne divise pas (p). Alors $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$.*

2. Soit v divise (p). Alors $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v^{-alt}$.

Définition 1.4.3. *La tour*

$$\{U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)(D_{1,0}(v))\}_{s\geq 1}$$

associée à la donnée $D_{1,0}(v)$ est la tour de sous-groupes compacts ouverts

$$U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

définis par :

$$U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

Par construction, les tours $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$, $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ vérifient l'hypothèse 1.2.1. En dehors de $\mathcal{N}(p)$, les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$, $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ associés à une même donnée $D_{1,0}$ sont des sous-groupes compacts ouverts maximaux indépendants de s. Ils sont égaux et indépendants de s en dehors de (p). Soit v ne divisant pas (p). Ces groupes contiennent l'image de $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ plongé dans $B_v^\times$, soit parce qu'ils sont maximaux si v ne divise pas $\mathcal{N}$, soit parce que $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ stabilise $D(v)$. Nous omettrons en général la mention de la donnée $D_{1,0}(v)$ dans nos futures références aux tours $\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}$ et $\{U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)\}$.

Si nous fixons un isomorphisme approprié ϕ_v entre $B_v^\times$ et $\mathrm{GL}_2(F_v)$, nous pouvons pour clarifier la situation nous limiter aux définitions de $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ suivantes, qui gagnent en prosaïsme ce qu'elles perdent en souplesse.

Définition 1.4.4. *Soit v une place de F divisant (p).*

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | a-1,\ c \in (\varpi_v^s) \right\}$$

Ou encore :

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}(\varpi_v^s) \right\}$$

Soit v une place de F divisant $\mathcal{N}$.

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | c \in \mathcal{N} \right\}$$

Ou encore :

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}(\varpi_v) \right\}$$

Soit enfin v une place de F telle que $v \nmid \mathcal{N}(p)$. Alors $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est un compact maximal de $B_v^\times$.

Définition 1.4.5. *Soit v une place de F divisant (p).*

$$U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | c,\ d-1 \in (\varpi_v^s) \right\}$$

Ou encore :

$$U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{mod}(\varpi_v^s) \right\}$$

Soit v une place de F telle que $v \nmid (p)$. Alors $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est égal à $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$.

Nous nous intéressons dans cette sous-section aux tours de courbes de Shimura

$$\begin{aligned} \{M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1} &= \{M_{U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)}\}_{s\geq 1} \\ \{M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1} &= \{M_{U_{0,1}(\mathcal{N},P^s)}\}_{s\geq 1} \\ \{M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1} &= \{M_{U_{1,1}(\mathcal{N},P^s)}\}_{s\geq 1} \end{aligned}$$

Lorsqu'il n'y a pas lieu de distinguer les deux sous-groupes compacts ouverts $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ de $\widehat{B}^\times$, nous notons simplement $U(\mathcal{N}, P^s)$ l'un d'entre eux et $M(\mathcal{N}, P^s)$ la courbe de Shimura qui lui est associée.

Corps des constantes

Soit v une place finie de F. La norme réduite de $U(\mathcal{N}, P^s)$ composée avec la projection sur v

$$nr_v : U(\mathcal{N}, P^s) \longrightarrow \mathcal{O}_{F,v}^\times$$

est surjective. Le corps des constantes de $M(\mathcal{N}, P^s)$ est donc isomorphe au corps de classe étroit de F, que nous avons noté F_0 dans la section 1.2.

$$F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / nr(U(\mathcal{N}, P^s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(F_0/F)$$

En revanche, la composée de la norme réduite de $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et de la projection sur v n'est pas surjective en $v|(p)$ car $x \in \widehat{\mathcal{O}}_{F,v}^\times$ appartient à l'image de nr_v si et seulement si $x - 1 \in (\varpi^s)$. Soit $F[s]$ l'extension abélienne de F définie par :

$$F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times / nr(U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(F[s]/F)$$

Soit :

$$F[\infty] = \bigcup_{s=1}^{\infty} F[s]$$

Le défaut de surjectivité de nr étant localisé en les places divisant (p), les extensions $F[s]$ et $F[\infty]$ ne dépendent pas de $\mathcal{N}$. Le corps des constantes de $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ est isomorphe à $F[s]$. Le groupe de Galois de $F[s]/F_0$ est le noyau du morphisme canonique

$$\mathrm{Gal}(F[s]/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_0/F)$$

donc du morphisme

$$F_+^\times\backslash\widehat{F}^\times/nr(U_{1,1}(\mathcal{N},P^s)) \longrightarrow F_+^\times\backslash\widehat{F}^\times/nr(U(\mathcal{N},P^s))$$

D'après les lemmes 1.1.1 et 1.1.2, il s'inscrit donc dans la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \frac{F_+^\times \cap nr(U(\mathcal{N},P^s))}{F_+^\times \cap nr(U_{1,1}(\mathcal{N},P^s))} \longrightarrow \frac{nr(U(\mathcal{N},P^s))}{nr(U_{1,1}(\mathcal{N},P^s))} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F[s]/F_0) \longrightarrow 1 \tag{1.4.1.1}$$

Explicitons les termes qui apparaissent dans cette suite exacte. La norme réduite de $U(\mathcal{N},P^s)$ étant une application surjective, le groupe $F_+^\times \cap nr(U(\mathcal{N},P^s))$ est l'ensemble des unités totalement positives de $\mathcal{O}_F$, que nous notons $\mathcal{O}_{F,+}^\times$. En dehors de $v|(p)$, les groupes $U(\mathcal{N},P^s)_v$ et $U_{1,1}(\mathcal{N},P^s)_v$ sont égaux, donc les éléments non-triviaux du quotient proviennent exclusivement de la différence entre ces deux groupes en $v|(p)$. Ils s'expriment uniquement au moyen de conditions de congruence modulo (p). Un élément de $F_+^\times \cap nr(U_{1,1}(\mathcal{N},P^s))$ est nécessairement congru à 1 modulo ϖ_v^s. La description de $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$ est donc donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.4.6. *Soit $s>0$. Soit $\mathcal{O}_{F,+}^\times$ l'ensemble des unités de $\mathcal{O}_F$ totalement positives et $\mathcal{O}_{F,+,1,s}^\times$ l'ensemble des unités de $\mathcal{O}_F$ totalement positives congrues à 1 modulo ϖ_v^s pour tout $v|(p)$. La suite courte suivante est alors exacte.*

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{F,+}^\times}{\mathcal{O}_{F,+,1,s}^\times} \longrightarrow \prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F[s]/F_0) \longrightarrow 1$$

Corollaire 1.4.7. *Supposons que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p. Il existe alors un groupe fini Δ, une suite de quotients Δ_s de Δ telle que $\Delta_s = \Delta$ pour s assez grand et une suite croissante d'entiers positifs $n(s)$ tels que :*

$$\mathrm{Gal}(F[s]/F_0) \xrightarrow{\sim} \Delta_s \times (\mathbb{Z}/p^{n(s)}\mathbb{Z})$$

Démonstration. Il s'agit du lemme 1.1.3 appliqué à la tour d'extension $F[s]/F_0$. □

Conformément à notre hypothèse permanente, nous supposons que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p.

1.4.2 Involution sur $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)$

Le but de cette sous-section est de construire un isomorphisme involutif de $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F F[s]$ vérifiant de bonnes propriétés de compatibilité pour l'action $<\cdot>$, des correspondances de Hecke et de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Dans le cas classique, cet isomorphisme est donné par l'involution de Fricke.

Les courbes $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)$, $M_{0,1}(\mathcal{N},P^s)$ et $M_{1,1}(\mathcal{N},P^s)$ sont munies de l'action diamant $<\cdot>$ de $\widehat{F}^\times$ définie dans la sous-section 1.2.1. Soit $U(s)$ l'un des trois groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$, $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ ou $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$. D'après la discussion que nous avons effectuée dans la sous-section 1.2.1, il est possible de restreindre l'étude de l'action de $<a>$ au cas où a appartient à $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ en les places v où B ramifie et en celles où $U(s)$ n'est pas maximal. En particulier, l'action locale $<a_v>$ est triviale pour v appartenant à $Ram(B)$. En $v|\mathcal{N}$, nous avons déjà remarqué que $U(s)_v$ contient le sous-groupe compact maximal du centre de B_v. L'action locale $<a_v>$ est donc aussi triviale en ces places.

La courbe $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ est munie de deux actions de

$$G_s = \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$$

données par les expressions suivantes sur $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}$:

$$<a>_1[z,b] = [z,b'] \text{ avec } \forall\ v|(p)\ b'_v = b_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix} \tag{1.4.2.1}$$

$$<a>_2[z,b] = [z,b'] \text{ avec } \forall\ v|(p)\ b'_v = b_v \begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.2.2}$$

Pour a un élément de $\widehat{F}^\times$ dont les v-composantes sont dans $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ si $v|(p)$, nous écrivons également $<a>_1$ et $<a>_2$ pour indiquer les actions de la projection de a dans $\prod\limits_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$. Nous ferons usage de l'écriture légèrement abusive

$$<a>_1[z,b] = [z, b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}]$$

et de même pour $<a>_2$. Pour i égal à 1 ou 2, soit $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_i G_s$ la courbe $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ quotientée par l'action $<\cdot>_i$ de G_s. Alors :

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_s = M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s),\ M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_s = M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

Le quotient

$$\mathcal{O}_{F,+}^\times / \mathcal{O}_{F,+,1,s}^\times$$

se plonge dans G_s, donc agit sur $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$. Soit $G_{s,+}$ son image dans G_s. Pour i égal à 1 ou 2, soit $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_i G_{s,+}$ la courbe $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ quotientée par l'action $<\cdot>_i$ de $G_{s,+}$.

Proposition 1.4.8. *Le morphisme $-alt = \prod\limits_v (-alt_v)$ induit des isomorphismes analytiques :*

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an} \xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an} \tag{1.4.2.3}$$

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}/ *_1 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}/ *_2 G_{s,+} \tag{1.4.2.4}$$

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}/ *_i G_s \xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}/ *_i G_s \tag{1.4.2.5}$$

Le morphisme $-alt$ est défini sur $F[s]$.

Démonstration. Soit $v \nmid \mathcal{N}(p)$. Les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ sont alors égaux et sont des compacts maximaux. Il en est donc de même pour $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$. Le groupe $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est donc isomorphe à $(U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v)^{-alt_v}$.

Soit $v|\mathcal{N}$. Les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ sont égaux et le morphisme $-alt_v$ est une involution les stabilisant. C'est donc un isomorphisme et le groupe $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est isomorphe à $(U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v)^{-alt_v}$.

Soit enfin $v|(p)$. Par définition de $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$, $(U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v)^{-alt_v}$ est égal à $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$. Donc $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est isomorphe à $(U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)_v)^{-alt_v}$.

L'application

$$\begin{array}{rlcl} -alt: & M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an} & \longrightarrow & M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an} \\ & [z,b] & \longmapsto & [z, b^{-alt}] \end{array}$$

est donc une involution analytique de $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}$, ce qui établit (1.4.2.3).

Soit a appartenant à G_s :

$$(< a >_1 [z,b])^{-alt} = [z, b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}]^{-alt} = [z, b^{-alt} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] = < a^{-1} >_2 [z,b]^{-alt}$$

Ceci établit (1.4.2.4) et (1.4.2.5).

Le fait que le morphisme $-alt$ soit défini sur $F[s]$ peut se montrer naturellement en considérant son expression sur les points CM de $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$. La démonstration de cette assertion est l'objet de la proposition 1.5.3. □

Proposition 1.4.9. *Soit* $s > 0$.

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \qquad (1.4.2.6)$$

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \qquad (1.4.2.7)$$

Les membres de gauche des équations (1.4.2.6) et (1.4.2.7) sont munis d'une action de :

$$\frac{\prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times}{\iota(\mathcal{O}_{F,+}/\mathcal{O}_{F,+,1,s})}$$

Les membres de droite sont munis d'une action de $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$. *Après identification de ces deux groupes par la loi de réciprocité* rec_F, *les isomorphismes (1.4.2.6) et (1.4.2.7) sont compatibles à cette action.*

Démonstration. Soit $F(M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s))$ et $F(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))$ les corps des constantes de $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) & \longrightarrow & M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(F(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(F(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))) \end{array}$$

Fixons un isomorphisme de $F(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))$ dans $F[s]$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de $F(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))$ dans F_0 donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) \arrow[r] \arrow[d] & M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(F[s]) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(F_0)
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un morphisme :

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) \longrightarrow M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

Considérons le diagramme de revêtements suivant.

$$\begin{array}{c}
M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) \\
| \\
M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \\
| \\
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \\
| \\
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)
\end{array} \tag{1.4.2.8}$$

Le revêtement

$$\begin{array}{c}
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \\
| \\
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)
\end{array}$$

a $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$ pour groupe de Galois. Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ est égal au groupe engendré par $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$ pour $v|(p)$. Donc le revêtement

$$\begin{array}{c}
M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) \\
| \\
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)
\end{array}$$

a $\prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$ pour groupe de Galois. Le revêtement

$$\begin{array}{c}
M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \\
| \\
M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)
\end{array}$$

a donc pour groupe de Galois le quotient suivant :

$$\frac{\prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times}{\iota(\mathcal{O}_{F,+}/\mathcal{O}_{F,+,1,s})}$$

D'après la proposition 1.4.6, il a donc $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$ pour groupe de Galois. Nous en concluons que :

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

La démonstration pour $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+}$ se fait de la même manière en changeant $*_1$ en $*_2$ et $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ en $M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$.

La compatibilité des actions de

$$\frac{\prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times}{\iota(\mathcal{O}_{F,+}/\mathcal{O}_{F,+,1,s})}$$

et de $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$ est l'énoncé de la proposition 1.4.8. □

Corollaire 1.4.10. *Soit S l'ensemble des plongements de $F[s]$ dans $\mathbb{C}$. Les ensembles*

$$(M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s])^{an} = \coprod_{\sigma\in S} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)^{an}$$

et

$$(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s])^{an} = \coprod_{\sigma\in S} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)^{an}$$

sont munis d'une action transitive de $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$. *Il existe un isomorphisme*

$$\alpha : M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \xrightarrow{\sim} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

tel que $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in$ $\mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$.

Démonstration. D'après le lemme 1.4.8, le morphisme $-alt$ induit un isomorphisme :

$$M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+}$$

Soit α l'isomorphisme

$$\alpha : M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \xrightarrow{\sim} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

défini par la composition des isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] & \xrightarrow{\sim} & M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+} \\ & \xrightarrow{-alt} & M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \\ & \xrightarrow{\sim} & M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \end{array}$$

Soit a un élément de $\widehat{F}^\times$ dont les v-composantes sont dans $(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$ si $v|(p)$. En $v|(p)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}^{-alt} = \begin{pmatrix} a_v^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$< a >_1 \circ -alt = -alt \ \circ < a^{-1} >_2$$

D'après la proposition 1.4.9 et la définition de α, nous avons donc :

$$\mathrm{rec}_F\, a \cdot P \longmapsto < a >_1 \cdot P \overset{-alt}{\longmapsto} < a^{-1} >_2 \cdot P^{-alt} \longmapsto \mathrm{rec}_F\, a^{-1} \cdot P^{-alt}$$

$\square$

Nous construisons maintenant une involution sur $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$ qui soit la composée de α et d'un isomorphisme de la forme suivante :

$$M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \xrightarrow{[\cdot w_s]} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

Un tel isomorphisme existe s'il existe $w_s \in \widehat{B}^\times$ tel que

$$w_s^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) w_s = U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

et tel que w_s^2 soit d'action triviale sur $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$. Comme nous l'avons vu lors des définitions 1.4.4 et 1.4.5, quitte à fixer un isomorphisme ϕ_v de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ dans $\widehat{B}_v^\times$, les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ admettent des expressions explicites en $v|(p)$ et nous voulons écrire une matrice w_s explicite convenable.

Définition 1.4.11. *Soit $s > 0$. Soit*

$$\phi_v : \widehat{B}_v^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(F_v)$$

tel que $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ admettent les expressions explicites données dans les définitions 1.4.4 et 1.4.5. Nous définissons w_s par les conditions locales suivantes.

Soit $v|(p)$.

$$\phi_v(w_s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varpi_v^s & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v|\mathcal{N}$. Soit $n = \mathrm{ord}_v \mathcal{N}$.

$$\phi_v(w_s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varpi_v^n & 0 \end{pmatrix}$$

Sinon $(w_s)_v$ est l'identité.

En $v|(p)$, le calcul

$$(w_s)_v^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (w_s)_v = \begin{pmatrix} d & -c/\varpi^s \\ -b\varpi^s & a \end{pmatrix}$$

montre que $(w_s)_v^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v (w_s)_v = U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)_v$. En $v|\mathcal{N}$, le même calcul avec $s = n$ montre le même résultat. En dehors de $\mathcal{N}(p)$, les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ sont égaux et w_s est l'identité. Donc :

$$w_s^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) w_s = U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

Proposition 1.4.12. *Soit $s > 0$. Il existe alors un isomorphisme involutif*

$$W_s : M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \xrightarrow{\sim} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

tel que $\sigma \circ W_s = W_s \circ \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(F[s]/F_0)$. D'après la proposition 1.4.6, l'élément σ peut s'écrire $\sigma = \mathrm{rec}_F\, a$ avec $a_v \in (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$ si $v|(p)$. En $v|(p)$:

$$(w_s)_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix} (w_s)_v^{-1} = \begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $< a >_2 \circ\, w_s = w_s \circ < a >_1$. L'application

$$[\cdot w_s] : M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s) \longrightarrow M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$$

induit donc un isomorphisme :

$$w_s : M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+}$$

La composition des isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] &\xrightarrow{\sim} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_1 G_{s,+} \\ &\xrightarrow{w_s} M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)/ *_2 G_{s,+} \\ &\xrightarrow{\sim} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \end{aligned}$$

définit un isomorphisme :

$$W_s : M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s] \xrightarrow{\sim} M_{0,1}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s]$$

L'isomorphisme W_s est défini par l'application de w_s suivie de celle de α. Donc :

$$\sigma \circ W_s = \sigma \circ \alpha \circ w_s = \alpha \circ \sigma^{-1} \circ w_s \tag{1.4.2.9}$$
$$= \alpha \circ w_s \circ \sigma^{-1} = W_s \circ \sigma^{-1} \tag{1.4.2.10}$$

□

Proposition 1.4.13. *L'application W_s vérifie les compatibilités suivantes :*

1. *Soit $a \in \widehat{F}^\times$. Alors :*
$$W_s \circ <a> = <a^{-1}> \circ W_s$$
2. *Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Nous rappelons que $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ agit sur l'ensemble des composantes connexes de $(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s])^{an}$ et que l'action de σ est donnée par la multiplication par un élément $b \in \widehat{B}^\times$ de norme réduite a. Alors :*
$$W_s \circ <a^{-1}> \circ \sigma = \sigma \circ W_s$$
3. *Soit $v \notin Ram(B)$. Soit $T(v) = [U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)]$ la correspondance de Hecke définie en (1.2.1.6). Alors :*
$$[U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)] \circ W_s = W_s \circ [U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)]$$

Démonstration. 1. Nous avons vu que nous pouvons nous limiter à étudier $<a>$ pour $a \in \widehat{F}^\times$ inversible en les places de ramification de B. Nous prenons un tel a et rappelons que l'action locale $<a_v>$ en $v \in Ram(B)$ est alors triviale. Soit v une place de F qui n'est pas dans $Ram(B)$.
$$\begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}^{-alt} = \begin{pmatrix} a_v^{-1} & 0 \\ 0 & a_v^{-1} \end{pmatrix}$$
Et :
$$\begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix} w_s^{-alt} = w_s^{-alt} \begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}$$
Donc $W_s \circ <a> = <a^{-1}> \circ W_s$.

2. Sur $\pi_0(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s])$, l'action diamant de l'idèle a est donnée localement en une place v n'appartenant pas à $Ram(B)$ par la multiplication par la matrice diagonale :
$$\begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}$$
L'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ se factorise à travers un groupe commutatif. Soit a une idèle telle que l'action de σ soit donnée par la multiplication par un élément b de norme réduite a. En $v \notin Ram(B)$, nous pouvons choisir par exemple :
$$b_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_v \end{pmatrix}$$
Nous rappelons également qu'il est possible sans perte de généralité de supposer que a est inversible en toute place de ramification de B. Nous voyons donc que :
$$<a^{-1}> \circ \sigma = \sigma^{-1}$$
D'après la relation $W_s \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ W_s$ de la proposition 1.4.12 :
$$W_s \circ <a^{-1}> \circ \sigma = \sigma \circ W_s$$

3. Soit $v \notin Ram(B)$. Nous rappelons que la correspondance $T(v)$ est définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M_{U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\cap gU_{1,0}(\mathcal{N},P^s)g^{-1}} \arrow[r, "{[\cdot g]}"] \arrow[d] & M_{g^{-1}U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)g\cap U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)} \arrow[d] \\ M_{U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)} \arrow[r, dashed, "T(v)"] & M_{U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)} \end{tikzcd}$$

Où $g \in \widehat{B}^\times$ est l'identité en dehors de v et

$$\phi_v(g_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}$$

pour l'isomorphisme $\phi_v \ : \ B_v^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ de la définition 1.4.11.
Soit tout d'abord $v|\mathcal{N}(p)$. Nous remarquons que :

$$(w_s)_v^{-1} g_v (w_s)_v = \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_v^{alt} \tag{1.4.2.11}$$

Donc :

$$w_s^{-1} g w_s = g^{alt}$$

L'application à cette égalité de $-alt$ montre alors que $w_s^{alt} g^{-alt} w_s^{-alt} = g^{-1}$. Donc :

$$(w_s^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) w_s)^{-alt} = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$$

Ceci montre l'assertion 3 pour $v|\mathcal{N}(p)$.
Soit maintenant $v \nmid \mathcal{N}(p)$. Le groupe $(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))_v$ est donc maximal. Alors :

$$[U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g_v U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)] = [U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g_v^{alt} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)]$$

En une telle place, w_s est l'identité, donc

$$(w_s^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) w_s)^{-alt} = (U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g^{alt} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))^{-alt}$$

et l'égalité

$$(w_s^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) w_s)^{-alt} = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g^{-1} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$$

est encore vraie.

□

1.4.3 Changement de niveau

Nous nous intéressons maintenant aux projections dans les tours

$$\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$$

et

$$\{U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s\geq 1}$$

associées à une donnée $D_{1,0}$ que nous fixons une fois pour toute et que nous omettons donc dans la suite. Plus particulièrement, nous considérons les compatibilités existantes entre les projections canoniques et l'action des opérateurs de Hecke. Nous rappelons que la définition des correspondances de Hecke (1.2.1.7) sur M_H nécessite des choix explicites d'éléments g_v en les places où H n'est pas un sous-groupe compact ouvert maximal. Les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ et $U_{0,1}(\mathcal{N}, P^s)$ étant maximaux en dehors de $\mathcal{N}(p)$, nous imposons un choix explicite ne dépendant pas de s en les places divisant les idéaux $\mathcal{N}$ et (p). Nous rappelons qu'il est possible d'identifier $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ en $v|(p)$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$. Si nous fixons pour tout s et tout $v|(p)$ de tels isomorphismes $\phi_v(s)$,

$$\phi_v(s) : U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v \xrightarrow{\sim} H_s \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$$

nous exigeons que l'élément g soit alors celui défini par :

$$\forall\ v|(p),\ g_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} \tag{1.4.3.1}$$

La propriété suivante est fondamentale pour la suite de notre étude.

Proposition 1.4.14. *Pour tout $s \geq 1$ et tout v divisant (p), soit $\phi_v(s)$ un isomorphisme*

$$\phi_v(s) : U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \xrightarrow{\sim} \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}(\varpi_v^s) \right\}$$

Nous supposons que la famille des $(\phi_v(s))$ est compatible. Soit $g \in \widehat{B}^\times$ tel que $g_v = 1$ en $v \nmid (p)$ et tel que g_v soit donné par le choix explicite (1.4.3.1) en $v|(p)$. Alors,

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1}$$

est égal à $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ en dehors de (p) et est défini en $v|(p)$ par :

$$(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1})_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v | c \equiv 0 \,\mathrm{mod}(\varpi_v^{s+1}) \right\}$$

En particulier, il existe une inclusion :

$$\iota \ : \ U_{1,0}(\mathcal{N}p^{s+1}) \hookrightarrow U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1}$$

Démonstration. En dehors de (p), l'élément g_v est l'identité donc :

$$(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1})_v = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$$

Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ contient bien $U_{1,0}(\mathcal{N}p^{s+1})_v$.

Soit $v|(p)$. D'après les choix explicites faits dans l'énoncé de la proposition et en (1.4.3.1), g_v s'écrit :

$$g_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}$$

Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ s'écrit :

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mathrm{mod}(\varpi_v^s) \right\}$$

Le calcul

$$g_v \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g_v^{-1} = \begin{pmatrix} a & b/\varpi_v \\ c\varpi_v & d \end{pmatrix}$$

montre que :

$$(U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1})_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v | c \equiv 0 \,\mathrm{mod}(\varpi_v^{s+1}) \right\}$$

Nous en déduisons le résultat annoncé. □

Proposition 1.4.15. *Soit $s > 0$. Soit $g \in \widehat{B}^\times$ tel que $g_v = 1$ en $v \nmid (p)$ et tel que g_v soit donné par le choix explicite (1.4.3.1) en $v|(p)$. Soit E l'ensemble :*

$$E = \left\{ \prod_{v|p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_v\varpi_v^s & \varpi_v \end{pmatrix} | x_v \in \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v \right\}$$

L'ensemble E est un système de représentants du quotient :

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)/U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$$

La donnée de ce système de représentants fournit en particulier une bijection :

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)/U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v$$

Soit par ailleurs $(\Gamma_s)_v$ le groupe défini par :

$$(\Gamma_s)_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | a \equiv 1 \,\mathrm{mod}(\varpi_v^s),\ c \equiv 0 \,\mathrm{mod}(\varpi_v^{s+1}) \right\}$$

Un système de représentants de $(\Gamma_s)_v g_v (\Gamma_s)_v/(\Gamma_s)_v$ est donné par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_v\varpi_v^{s+1} & \varpi_v \end{pmatrix} | x_v \in \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v \right\}$$

Ce choix de système de représentants fournit une bijection :

$$(\Gamma_s)_v g_v (\Gamma_s)_v/(\Gamma_s)_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v$$

Démonstration. Ces assertions sont classiques lorsque B est égale à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ et se démontrent de la même façon dans le cas général. $\square$

Nous considérons la tour $\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_s$ munie de tels choix d'isomorphismes et d'éléments g. Pour tout entier s strictement positif, nous fixons également une involution W_s construite comme dans la sous-section 1.4.2 avec le choix de w_s induit par le choix d'isomorphisme $\phi_v(s)$ en $v|\mathcal{N}(p)$. Nous rappelons donc qu'en $v|(p)$:

$$\phi_v(s)(w_s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varpi^s & 0 \end{pmatrix}$$

Afin de simplifier les notations, nous notons dans ce qui suit $U_s = U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$.

Le diagramme suivant définit les inclusions et applications essentielles que nous allons considérer.

$$\begin{tikzcd}
M_{U_{s+1}} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[drr, bend right, "\pi_g"'] & M_{U_s \cap g U_s g^{-1}} \arrow[r, "{[\cdot g]}"] \arrow[d, "pr_1"] & M_{g^{-1} U_s g \cap U_s} \arrow[d, "pr_g"] \\
& M_{U_s} \arrow[r, dashed, "{[U_s g U_s]}"] & M_{U_s}
\end{tikzcd} \tag{1.4.3.2}$$

D'après les choix que nous avons effectués, $g w_s = w_{s+1}$ et $w_s g w_s^{-1} = g^{alt}$. En particulier :

$$\begin{aligned}
\pi_1 W_{s+1}[z, b]_{U_{s+1}} &= \pi_1[z, b^{-alt} w_{s+1}^{-alt}]_{U_{s+1}} \\
&= [z, b^{-alt} g^{-alt} w_s^{-alt}]_{U_s} \\
&= W_s[z, bg]_{U_s} \\
&= W_s \pi_g [z, b]_{U_{s+1}}
\end{aligned}$$

Donc $pr_1 \circ W_{s+1} = W_s \circ pr_g$. Nous allons faire un usage constant de cette relation, de celles définies par le diagramme (1.4.3.2) et de leurs manifestations cohomologiques covariantes et contravariantes. Nous reprenons les notations de la sous-section 1.2.2 et notons :

$$\mathcal{W}(H) = H^1_{et}(M_H \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \tag{1.4.3.3}$$

Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, voici la forme cohomologique covariante de (1.4.3.2) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(U_{s+1}) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[dr, "\pi_{1*}"] \arrow[drr, bend right, "\pi_{g*}"'] & \mathcal{W}(U_s \cap g U_s g^{-1}) \arrow[r, "{[\cdot g]_*}"] & \mathcal{W}(g^{-1} U_s g \cap U_s) \arrow[d, "pr_{g*}"] \\
& \mathcal{W}(U_s) \arrow[u, "pr_1^*"'] \arrow[r, "{[U_s g U_s]_*}"] & \mathcal{W}(U_s)
\end{tikzcd} \tag{1.4.3.4}$$

Et en voici la forme contravariante :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(U_{s+1}) & \mathcal{W}(U_s \cap gU_sg^{-1}) \arrow[l, "\iota^*"'] \arrow[d, "pr_{1*}"] & \mathcal{W}(g^{-1}U_sg \cap U_s) \arrow[l, "{[\cdot g]^*}"'] \\
 & \mathcal{W}(U_s) \arrow[ul, "\pi_1^*"] & \mathcal{W}(U_s) \arrow[l, "{[U_sgU_s]^*}"] \arrow[u, "pr_g^*"] \arrow[ull, bend left, "\pi_g^*"]
\end{tikzcd}
\tag{1.4.3.5}
$$

D'après le diagramme (1.4.3.2) :

$$
\begin{aligned}
[U_sgU_s]_* &= pr_{g*} \circ [\cdot g]_* \circ pr_1^* \\
[U_sgU_s]^* &= pr_{1*} \circ [\cdot g^{-1}]_* \circ pr_g^*
\end{aligned}
$$

Soit $\Gamma_s = U_s \cap gU_sg^{-1}$. Nous avons déjà vu que :

$$
\forall\ v|(p)\ (\Gamma_s)_v = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | a \equiv 1 \bmod(\varpi_v^s),\ c \equiv 0 \bmod(\varpi_v^{s+1}) \right\}
$$

Lemme 1.4.16. *Soit $s > 0$. Soit ξ défini par*

$$
\begin{aligned}
\xi :\ \mathcal{W}(\Gamma_s) &\longrightarrow \mathcal{W}(U_s) \\
x &\longmapsto pr_{g*}[\cdot g]_* x
\end{aligned}
$$

Soit $e\mathcal{W}(U_s)$ le plus grand facteur direct de $\mathcal{W}(U_s)$ sur lequel $[U_sgU_s]_*$ est inversible et $e\mathcal{W}(\Gamma_s)$ le plus grand facteur direct de $\mathcal{W}(\Gamma_s)$ sur lequel $[\Gamma_s g\Gamma_s]_*$ est inversible. L'application pr_1^* induit alors un isomorphisme :

$$
pr_1^* : e\mathcal{W}(U_s) \xrightarrow{\sim} e\mathcal{W}(\Gamma_s)
$$

Cet isomorphisme a pour inverse $[U_sgU_s]_*^{-1} \circ \xi = \xi \circ [\Gamma_s g \Gamma_s]_*^{-1}$.

Démonstration. Nous considérons le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(U_{s+1}) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[dr, "\pi_{1*}"] \arrow[drr, bend right, "\pi_{g*}"'] & \mathcal{W}(\Gamma_s) \arrow[r, "{[\cdot g]_*}"] \arrow[dr, "\xi"] & \mathcal{W}(g^{-1}U_sg \cap U_s) \arrow[d, "pr_{g*}"] \\
 & \mathcal{W}(U_s) \arrow[u, "pr_1^*"'] \arrow[r, "{[U_sgU_s]_*}"] & \mathcal{W}(U_s)
\end{tikzcd}
\tag{1.4.3.6}
$$

Nous voyons que $\xi \circ pr_1^* = [U_sgU_s]_*$. Nous voulons calculer également $pr_1^* \circ \xi$. D'après les deux résultats de la proposition 1.4.15, $\Gamma_s/(\Gamma_s \cap g\Gamma_s g^{-1})$ est en bijection avec $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \cap gU_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)g^{-1}$. Donc $pr_1^* \circ \xi = [\Gamma_s g \Gamma_s]_*$. □

Lemme 1.4.17. *Soit $s > 0$. La composition $pr_{1*}pr_1^*$ vérifie :*

$$\begin{aligned} pr_{1*}pr_1^* : \ \mathcal{W}(U_s) &\longrightarrow \mathcal{W}(U_s) \\ x &\longmapsto (\prod_{v|p} |\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v|)x \end{aligned}$$

Soit :

$$S = \{a \in \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^{s+1})^\times | a_v \equiv 1 \operatorname{mod}(\varpi^s)\}$$

La composition $\iota^*\iota_*$ vérifie :

$$\begin{aligned} \iota^*\iota_* : \ \mathcal{W}(U_{s+1}) &\longrightarrow \mathcal{W}(U_{s+1}) \\ x &\longmapsto \sum_{a \in S} < a >_* x \end{aligned}$$

Démonstration. D'après les définitions des morphismes de groupes de cohomologie f^* et f_*, $pr_{1*}pr_1^*$ est égal à la multiplication par $|U_s/\Gamma_s|$ et $\iota^*\iota_*$ est la trace sur Γ_s/U_{s+1}. Nous avons vu en (1.4.15) que U_s/Γ_s était en bijection avec $\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v$. Ceci démontre donc la première assertion du lemme.

Soit $\gamma \in \Gamma_s/U_{s+1}$. Soit $v|(p)$. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux représentants de γ_v dans $(\Gamma_s)_v$.

$$\frac{1}{eh - fg} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix} \in (U_{s+1})_v$$

Donc :

$$\frac{ah - bg}{eh - fg} \equiv 1 \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1}$$

Donc $ah - bg \equiv eh - fg \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1}$. Par définition de $(\Gamma_s)_v$, $g \equiv 0 \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1}$ donc $a \equiv e \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1}$. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \ \Gamma_s/U_{s+1} &\longrightarrow \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^{s+1})^\times \\ \gamma &\longmapsto (a_v \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1})_v \end{aligned}$$

est donc bien définie. Comme

$$\phi(\gamma\gamma') = (a_v a_v' + b_v c_v' \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1})_v = \phi(\gamma)\phi(\gamma')$$

l'application ϕ est un morphisme de groupes.

$$\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1 \Leftrightarrow \forall \ v|(p) \ a_v \equiv 1 \operatorname{mod} \ \varpi_v^{s+1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_s$$

Le morphisme ϕ est donc injectif. L'image de ϕ est l'ensemble des

$$a \in \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^{s+1})^\times$$

tels que a_v soit congruent à 1 modulo ϖ_v^s. L'ensemble S est donc un ensemble de représentants du quotient Γ_s/U_{s+1}, et il en est donc de même pour l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in S$. □

Soit :

$$C = \prod_{v|p} |\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v| = \prod_{v|p} N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v \tag{1.4.3.7}$$

Lemme 1.4.18. *Soit $s > 0$. L'image de $e\mathcal{W}(U_{s+1})$ par π_{1*} est alors contenue dans $C(e\mathcal{W}(U_s))$. Il existe une unique application*

$$C^{-1}\pi_{1*} : e\mathcal{W}(U_{s+1}) \longrightarrow e\mathcal{W}(U_s)$$

telle que $C(C^{-1}\pi_{1*}) = \pi_{1*}$. Sur $e\mathcal{W}(U_{s+1})$, l'application π_{g*} vérifie :

$$\pi_{g*} = [U_s g U_s]_* \circ (C^{-1}\pi_{1*})$$

Démonstration. Par définition, $\pi_{1*} = pr_{1*}\iota_*$. Sur $e\mathcal{W}(U_s)$, le morphisme pr_1^* est inversible, donc $(pr_1^*)^{-1}$ est bien défini et

$$\pi_{1*} = pr_{1*}pr_1^*(pr_1^*)^{-1}\iota_*$$

sur $e\mathcal{W}(U_{s+1})$. D'après le lemme 1.4.17, nous en déduisons que $\pi_{1*} = C(pr_1^*)^{-1}\iota_*$ sur $e\mathcal{W}(U_{s+1})$. Le groupe $e\mathcal{W}(U_{s+1})$ n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion donc $C^{-1}\pi_{1*}$ est bien défini et vérifie :

$$\begin{aligned} C^{-1}\pi_{1*} : \quad e\mathcal{W}(U_{s+1}) &\longrightarrow e\mathcal{W}(U_s) \\ x &\longmapsto (pr_1^*)^{-1}\iota_*(x) \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.4.16, $(pr_1^*)^{-1} = [U_s g U_s]_*^{-1} \circ \xi$ donc :

$$\begin{aligned} [U_s g U_s]_* \circ (C^{-1}\pi_{1*}) &= [U_s g U_s]_* \circ (pr_1^*)^{-1}\iota_* \\ &= [U_s g U_s]_* \circ [U_s g U_s]_*^{-1} \circ \xi\iota_* \\ &= \xi\iota_* \\ &= \pi_{g*} \end{aligned}$$

□

1.4.4 Dualité dans la tour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$

L'objectif de cette sous-section est d'utiliser les résultats des sous-sections 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3 pour construire des représentations galoisiennes à coefficients dans une algèbre d'Iwasawa à partir de la cohomologie étale des courbes $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ dans une tour appropriée. Les calculs effectués dans la sous-section 1.4.3 montrent que les représentations que nous construisons sont presque isomorphes à leurs duales en tant que module pour l'algèbre de Hecke et pour $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Comme dans la sous-section 1.2.2, nous considérons $L_{\mathfrak{p}}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Comme précédemment, s désigne un entier strictement positif et nous continuons de noter U_s pour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$. Soit :

$$\mathcal{W}_s = H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$$

Algèbre de Hecke ordinaire

Nous appelons algèbre de Hecke classique et notons $\mathfrak{h}_s$ l'algèbre suivante sur $\mathcal{O}$. L'algèbre $\mathfrak{h}_s$ contient tout d'abord les opérateurs $T(v) = [U_s g U_s]$ pour $v \notin Ram(B)$ et $v \nmid (p)$. Elle contient également les opérateurs $<a>$ pour $a \in \widehat{F}^\times$. Enfin, elle contient les opérateurs $T(v)$ en $v|(p)$ pour le choix explicite (1.4.3.1). Nous rappelons que ce choix est donné par l'équation suivante :

$$T(v) = [U_s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} U_s]$$

L'algèbre de Hecke classique

$$\mathfrak{h} = < T(v), <a> >_{\mathcal{O}} \tag{1.4.4.1}$$

agit sur $\mathcal{W}_s$ de façon covariante et contravariante.

Nous appelons algèbre de Hecke ordinaire et notons $\mathfrak{h}_s^{ord}$ l'algèbre quotient de $\mathfrak{h}_s$ suivante. Nous désignons par e ou parfois par e^{ord} le projecteur ordinaire :

$$e = \lim_{n\to\infty} T(p)^{n!} \in \mathfrak{h}_s$$

Nous définissons $\mathfrak{h}_s^{ord} = e\mathfrak{h}_s$. Si M est un $\mathfrak{h}_s$-module, nous notons eM ou M^{ord} le module :

$$M \otimes_{\mathfrak{h}_s} \mathfrak{h}_s^{ord}$$

Si m est un élément d'un $\mathfrak{h}_s$-module M, nous notons :

$$e^{ord} m = \lim_{n\to\infty} T(p)^{n!} m$$

Les algèbres $\mathfrak{h}_s^{ord}$ forment un système projectif pour l'application de transition qui envoie $T(v)$ sur lui-même. Nous notons $\mathfrak{h}_\infty^{ord}$ la limite projective $\varprojlim_s \mathfrak{h}_s^{ord}$.

L'algèbre $\mathfrak{h}_\infty^{ord}$ contient en particulier la sous-algèbre engendrée par les $<a>$. L'action $<\cdot>$ sur $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ est une action du groupe :

$$G_s = \frac{\widehat{F}^\times}{F^\times(\widehat{F}^\times \cap U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))}$$

Soit :

$$G_\infty = \varprojlim_s \frac{\widehat{F}^\times}{F^\times(\widehat{F}^\times \cap U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))} \tag{1.4.4.2}$$

Ce groupe s'insère dans la suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow \varprojlim_s \frac{\widehat{\mathcal{O}}_F^\times}{F^\times(\widehat{F}^\times \cap U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))} &\longrightarrow \varprojlim_s \frac{\widehat{F}^\times}{F^\times(\widehat{F}^\times \cap U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))} \\ &\longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow 1 \end{aligned} \tag{1.4.4.3}$$

Soit $\bar{\mathcal{O}}_F(v)^\times$ la clôture de l'image de $\mathcal{O}_F^\times$ dans $\mathcal{O}_{F,v}^\times$. En v divisant (p), les groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ tendent vers 0 quand s tend vers l'infini. Donc :

$$\varprojlim_s \frac{\widehat{\mathcal{O}}_F^\times}{F^\times(\widehat{F}^\times \cap U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))} \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times / \bar{\mathcal{O}}_F(v)^\times$$

La suite exacte (1.4.4.3) devient donc :

$$1 \longrightarrow \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times / \bar{\mathcal{O}}_F^\times \longrightarrow G_\infty \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow 1 \tag{1.4.4.4}$$

Le $\mathbb{Z}_p$-rang de G_∞ est égal à 1 car F vérifie la conjecture de Leopoldt en p par hypothèse. Soit $G_{\text{tors}} = (G_\infty)_{\text{tors}}$ et $\Gamma = G_\infty / G_{\text{tors}}$ la partie profinie pro-p maximale de G_∞. Nous fixons un scindage de la projection

$$G_\infty \longrightarrow G_\infty / G_{\text{tors}} = \Gamma$$

compatible via χ_F^{-1} avec le scindage canonique

$$\mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times / (\mathbb{Z}_p^\times)_{\text{tors}}$$

donné par $1 + p\mathbb{Z}_p$. Ce choix de scindage induit une injection :

$$\mathcal{O}[[\Gamma]] \hookrightarrow \mathcal{O}[[G_\infty]] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[G_{\text{tors}}] \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[\Gamma]]$$

Pour χ un caractère de G_∞, le choix de l'isomorphisme

$$G_\infty \xrightarrow{\sim} G_{\text{tors}} \times \Gamma$$

induit une décomposition $\chi = \chi_{tame}\chi_{wild}$ où χ_{tame} est la restriction de χ à G_{tors} et χ_{wild} sa restriction à Γ.

D'après le corollaire 1.4.7, le groupe $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$ s'inscrit dans la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^{\times}/\bar{\mathcal{O}}_{F,+}^{\times} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_0/F) \longrightarrow 1$$

En particulier, ce groupe s'écrit sous la forme

$$\Delta \times \Gamma$$

avec Δ fini et Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Les définitions explicites de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$ et de G_∞ fournissent une surjection de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$ sur G_∞ qui vient compléter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^{\times}/\bar{\mathcal{O}}_{F,+}^{\times} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Gal}(F_0/F) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^{\times}/\bar{\mathcal{O}}(v)_{F}^{\times} \arrow[r] & G_\infty \arrow[r] & \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \arrow[d, two heads] & \\
 & \mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \arrow[d, "\sim"] & \\
\Delta & \Delta \times \Gamma \arrow[l, "\chi_\Delta"'] \arrow[r, "\chi_\Gamma"] \arrow[d, two heads] & \Gamma \\
 & G_\infty &
\end{tikzcd} \tag{1.4.4.5}$$

définit alors un morphisme :

$$\chi_\infty : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$$

Pour $s \geq 1$, le caractère χ_Γ du diagramme (1.4.4.5) induit un caractère d'ordre fini χ_{Γ_s} à valeurs dans $\mathcal{O}[[\Gamma/\Gamma_s]]$. Soit :

$$\Lambda = \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)]] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[[\Gamma]][\Delta] \tag{1.4.4.6}$$

Le morphisme χ_∞ peut être considéré comme un caractère multiplicatif à valeurs dans $\Lambda^\times$ par la composition :

$$\chi_\infty : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \hookrightarrow \Lambda^\times$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, la surjection de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$ sur G_∞ donne en particulier un sens à $<\chi_\infty(\sigma)>$, si bien que $\mathcal{W}_s$ est muni de deux actions de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$: l'action galoisienne sur la cohomologie étale et l'action diamant donnée par $<\chi_\infty(\cdot)>$.

Soit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O})$ le $\mathcal{O}$-module muni des actions de $\mathfrak{h}_s$ et de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$:

$$\forall\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O})\ \forall\ T \in \mathfrak{h}_s\ (T_* \cdot f)(x) = f(T_*^{-1} \cdot x)$$

$$\forall\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O})\ \forall\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\ (\sigma \cdot f)(x) = f(\sigma^{-1} \cdot x)$$

Dualité sur $\mathcal{W}_s$

Nous considérons $\mathcal{W}_s$ comme un $\mathfrak{h}_s$-module muni de l'action covariante de $\mathfrak{h}$. La dualité de Poincaré fournit un accouplement alterné non-dégénéré :

$$<\cdot,\cdot>_s\ :\ \mathcal{W}_s \times \mathcal{W}_s \longrightarrow H^2_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)$$

Nous considérons $(x, y) \in \mathcal{W}_s^2$ et décrivons en détail les compatibilités entre $<x, y>$ et les actions de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et de l'algèbre de Hecke classique. Soit donc $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. L'action de σ sur μ_{p^∞} est décrite par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}^\times/F^\times \arrow[r, "rec_F"] \arrow[d, "N_{F/\mathbb{Q}}"'] & \mathrm{Gal}(F^{ab}/F) \arrow[d, "|_{\mathbb{Q}^{ab}}"] \arrow[dr, "\chi_F"] & \\
\widehat{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times \arrow[r, "rec_{\mathbb{Q}}"] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\chi_{cyc}"] & \mathbb{Z}_p^\times
\end{tikzcd}$$

L'action de σ sur $\mathcal{W}_s$ vérifie donc :

$$<\sigma x, \sigma y>_s = \sigma(<x, y>_s) = \chi_F^{-1}(\sigma)<x, y>_s$$

Si a appartient à

$$\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times$$

et si $\sigma = \mathrm{rec}_F\, a$, la normalisation de rec_F que nous avons choisie montre que :

$$\chi_F(\sigma) = (N_{F/\mathbb{Q}} a)_p$$

Soit $T(v) = [U_s g U_s]$ et $<a>$ dans $\mathfrak{h}_s$. D'après (1.2.2.13) et (1.2.2.14) :

$$<T(v)_* x, y>_s = <[U_s g_v U_s]_* x, y>_s$$

Et :

$$\begin{aligned}
<<a>_* x, y>_s &= <x, <a>^* y>_s \\
&= <x, <a^{-1}>_* y>_s
\end{aligned}$$

Nous supposons la tour $\{U_s\}_s$ munie des choix d'isomorphisme $\phi_v(s)$ et nous faisons le choix usuel d'élément w_s. Nous construisons maintenant un deuxième accouplement :

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_s : \quad \mathcal{W}_s \times \mathcal{W}_s &\longrightarrow \mathcal{O}(-1) \\ (x,y)_s &\longmapsto \, <x, W_s y>_s \end{aligned} \tag{1.4.4.7}$$

Soit $a \in \widehat{F}^\times$. D'après la proposition 1.4.13 :

$$\begin{aligned} (<a>_* x, y)_s &= \, <<a>_* x, W_s y>_s \\ &= \, <x, <a^{-1}>_* W_s y>_s \\ &= \, <x, W_s <a>_* y>_s \\ &= (x, <a>_* y)_s \end{aligned}$$

Soit v une place telle que $T(v)_* = [U_s g U_s]_*$ appartienne à $\mathfrak{h}_s$. D'après la proposition 1.4.13 :

$$\begin{aligned} (T(v)_* x, y)_s &= \, <T(v)_* x, W_s y>_s \\ &= \, <x, [U_s g^{-1} U_s]_* W_s y>_s \\ &= \, <x, W_s [U_s g U_s]_* y>_s \\ &= (x, T(v)_* y)_s \end{aligned} \tag{1.4.4.8}$$

Soit enfin $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F_0)$. Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_0)$ agit sur $\pi_0(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_{F_0} F[s])$ via son quotient $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_0)$. Soit a appartenant à

$$\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times$$

tel que $\mathrm{rec}_F\, a$ soit égal à l'image de σ dans $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_0)$.

$$\begin{aligned} (\sigma x, y)_s &= \, <\sigma x, W_s y>_s \\ &= \, <\sigma x, W_s <a^{-1}>_* \sigma <a>_* \sigma^{-1} y>_s \\ &= \, <\sigma x, \sigma W_s <a>_* \sigma^{-1} y>_s \\ &= \chi_F(\sigma)^{-1} (x, <a>_* \sigma^{-1} y)_s \end{aligned}$$

La troisième égalité est donnée par la proposition 1.4.13.

Pour M un $\mathfrak{h}_s[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module dont l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ est notée σx et n un entier relatif, nous notons $M<n>$ le $\mathfrak{h}_s[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module M muni de la même action de $\mathfrak{h}_s$ et de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ suivante :

$$\sigma \cdot x = \, <\chi_\infty(\sigma)^n> \sigma x$$

Proposition 1.4.19. *Soit $s > 0$ et $\mathfrak{h}_s$ l'algèbre de Hecke. L'accouplement (1.4.4.7)*

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_s : \quad \mathcal{W}_s \times \mathcal{W}_s &\longrightarrow \mathcal{O}(-1) \\ (x,y)_s &\longmapsto \, <x, W_s y>_s \end{aligned} \tag{1.4.4.9}$$

induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_s[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-modules :

$$\alpha_s : \mathcal{W}_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O})(-1)<-1>$$

Démonstration. Soit α_s le morphisme de $\mathcal{O}$-modules :

$$\begin{array}{rccl} \alpha_s : & \mathcal{W}_s & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O}) \\ & x & \longmapsto & (x, \cdot)_s \end{array}$$

Nous savons que α_s est un isomorphisme. Les calculs menés plus haut montrent que c'est un isomorphisme de $\mathfrak{h}_s^{ord}$-modules. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et $a = \chi_\infty(\sigma)$.

$$\begin{aligned} \alpha_s(\sigma x) &= (\sigma x, \cdot) \\ &= \chi_F(\sigma)^{-1}(< a^{-1} > \sigma)(x, \cdot) \\ &= \chi_F(\sigma)^{-1}(< a^{-1} > \sigma)\alpha_s(x) \end{aligned}$$

Donc l'image de α_s est le $\mathfrak{h}_s[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s, \mathcal{O})(-1)< -1 >$. $\square$

Accouplement Λ-adique

Lemme 1.4.20. *Soit $\mathcal{O}$ un anneau commutatif, G un groupe fini d'élément neutre e et X un $\mathcal{O}[G]$-module à gauche. Pour $a \in G$, on note pr_a l'application :*

$$\begin{array}{rccl} pr_a : & \mathcal{O}[G] & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & \sum_{g \in G} n_g[g] & \longmapsto & n_a \end{array}$$

Les modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(X, \mathcal{O}[G])$ sont alors munis d'une action de G à droite et sont isomorphes en tant que $\mathcal{O}[G]$-modules à droite. Des isomorphismes explicites sont donnés par :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(X, \mathcal{O}[G]) \\ & f & \longmapsto & \sum_{a \in G} f(a(\cdot))[a^{-1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(X, \mathcal{O}[G]) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O}) \\ & F & \longmapsto & pr_e(F(\cdot)) \end{array}$$

Démonstration. Soit $a \in G$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$, $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(X, \mathcal{O}[G])$, $x \in \mathcal{O}$ et $b \in G$. La multiplication à droite $(f * a)(x) = f(ax)$ et $(F * a)(x) = F(x)[a]$ définit bien une action à droite sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(X, \mathcal{O}[G])$.

$$\begin{aligned} \Phi(f)(bx) &= \sum_{a \in G} f(abx)[a^{-1}] \\ &= \sum_{a \in G} f(ax)[ba^{-1}] \\ &= [b]\sum_{a \in G} f(ax)[a^{-1}] \\ &= [b]\Phi(f)(x) \end{aligned}$$

Donc $\Phi(f)$ est bien défini. Si $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = \sum_{b \in G} n_b [b]$$

alors :

$$F(ax) = [a]F(x) = \sum_{b \in G} n_{a^{-1}b}[b]$$

Donc :

$$\begin{aligned}\Phi(pr_e(F(x))) &= \sum_{a \in G} pr_e(F(ax))[a^{-1}] \\ &= \sum_{a \in G} n_{a^{-1}}[a^{-1}] \\ &= F(x)\end{aligned}$$

Inversement, $\Psi \circ \Phi(f) = f$ donc Φ et Ψ sont des isomorphismes et l'un est l'inverse de l'autre. □

Soit $\mathcal{W}_s^{ord} = e\mathcal{W}_s$. Nous avons observé que l'action $<\chi_\infty(\cdot)>$ de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$ fait de $\mathcal{W}_s^{ord}$ un $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s]/F)][\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module. Soit x appartenant à $\mathcal{W}_s^{ord}$ et $(x, \cdot)$ appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_s^{ord}, \mathcal{O})(-1)<-1>$ le morphisme qu'il induit d'après la proposition 1.4.19. En appliquant le lemme 1.4.20 à $(x, \cdot)$, nous obtenons un morphisme :

$$\begin{array}{rccl}(x|\cdot): & \mathcal{W}_s^{ord} & \longrightarrow & \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s]/F)](-1)<-1> \\ & y & \longmapsto & \sum_{a \in \mathcal{G}_s} (x, <a>_* y)[a]^{-1}\end{array}$$

Donc un accouplement :

$$(\cdot|\cdot) : \mathcal{W}_s^{ord} \times \mathcal{W}_s^{ord} \longrightarrow \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s]/F)](-1)<-1>$$

La composition de l'isomorphisme α_s de la proposition 1.4.19 suivi de l'isomorphisme Φ du lemme 1.4.20 donne pour tout s strictement supérieur à 0 un isomorphisme de $\mathcal{O}[G_s][\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-modules :

$$\phi_s : \mathcal{W}_s^{ord} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G_s]}(\mathcal{W}_s^{ord}, \mathcal{O}[G_s])(-1)<-1>$$

Nous conservons la notation C de l'assertion (1.4.3.7).

Lemme 1.4.21. *Soit $s > 0$ et $(x, y) \in e\mathcal{W}_{s+1}^2$. Soit ϕ la projection canonique de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s+1]/F)]$ dans $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s]/F)]$. Alors :*

$$\phi((x|y)_{s+1}) = (\pi_{g*}x|C^{-1}\pi_{1*}y)_s \in \mathcal{O}[\mathcal{G}_s]$$

Démonstration. Pour simplifier la notation et seulement dans cette preuve, nous notons Gal_s le groupe $\mathrm{Gal}(F[s]/F)$. Par définition :

$$(x|y)_{s+1} = \sum_{b \in \mathrm{Gal}_{s+1}} (x, <b>_* y)_{s+1}[b]^{-1}$$

Pour $a \in \mathrm{Gal}_s$, soit B_a l'ensemble des $b \in \mathrm{Gal}_{s+1}$ tels que $\phi(b) = a$.

$$\begin{aligned}
\phi((x|y)_{s+1}) &= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} \left(\sum_{b \in B_a} (x, <b>_* y)_{s+1} \right) [a^{-1}] \\
&= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} \left((x, \sum_{b \in B_a} <ba^{-1}>_* <a>_* y)_{s+1} \right) [a^{-1}] \\
&= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} \left((x, \sum_{b \in B_1} <b>_* <a>_* y)_{s+1} \right) [a^{-1}]
\end{aligned}$$

Par définition de B_1, un élément b est dans B_1 si et seulement si $b_v \equiv 1 \bmod \varpi_v^s$ pour $v|(p)$. Nous appliquons le lemme 1.4.17 :

$$\begin{aligned}
\phi((x|y)_{s+1}) &= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} (x, \iota^* \iota_* <a>_* y)_{s+1}[a^{-1}] \\
&= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} (x, \iota^* pr_1^* (pr_1^*)^{-1} \iota_* <a>_* y)_{s+1}[a^{-1}] \\
&= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} (x, \pi_1^* C^{-1} \pi_{1*} <a>_* y)_{s+1}[a^{-1}] \\
&= \sum_{a \in \mathrm{Gal}_s} (\pi_{g*} x, C^{-1} \pi_{1*} <a>_* y)_s[a^{-1}] \\
&= (\pi_{g*} x | C^{-1} \pi_{1*} y)_s
\end{aligned}$$

□

Soit :

$$\mathcal{W}_\infty^{ord} = \varprojlim_{\pi_{g*}} \mathcal{W}_s^{ord} = \varprojlim_{\pi_{g*}} eH^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \qquad (1.4.4.10)$$

Lemme 1.4.22. *Soit* $e\mathcal{W}'_\infty = \varprojlim_{C^{-1}\pi_{1*}} \mathcal{W}_s^{ord}$. *Alors, l'application* ψ *suivante est un isomorphisme de* $\mathfrak{h}_\infty^{ord}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-module.*

$$\begin{aligned}
\psi :\ \mathcal{W}_\infty^{ord} &\xrightarrow{\sim} e\mathcal{W}'_\infty \\
(x_s)_s &\longmapsto (T(p)_*^{s-1} x_s)_s
\end{aligned}$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord la bonne définition de ψ. Soit donc $x \in \mathcal{W}_\infty^{ord}$ et $s > 0$. D'après 1.4.16 :

$$\begin{aligned} C^{-1}\pi_{1*}T(p)_*^s x_{s+1} &= (pr_1^*)^{-1}\iota_* T(p)_*^s x_{s+1} \\ &= T(p)_*^{s-1}\pi_{g*}x_{s+1} \\ &= T(p)_*^{s-1}x_s \end{aligned}$$

Donc $\psi(x)$ appartient bien à $e\mathcal{W}'_\infty$. L'algèbre de Hecke est commutative donc la compatibilité à l'action de $\mathfrak{h}_\infty^{ord}$ est vérifiée. L'action galoisienne n'est pas affectée par ψ. □

Proposition 1.4.23. *Soit* $\mathcal{W}_\infty^{ord} = \varprojlim_{\pi_{g*}} eH^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$. *Soit :*

$$\Lambda = \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)]]$$

Le $\Lambda[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-module* $\mathcal{W}_\infty^{ord}$ *est muni de l'accouplement alterné* $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ *suivant :*

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot)_\Lambda : & \mathcal{W}_\infty^{ord} \times \mathcal{W}_\infty^{ord} & \longrightarrow & \Lambda(-1)< -1 > \\ & (x,y) & \longmapsto & ((x_s|T(p)_*^{s-1}y_s)_s)_s \end{array}$$

L'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{W}_\infty^{ord} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{W}_\infty^{ord}, \Lambda)(-1)< -1 > \\ & x & \longmapsto & (x|\cdot)_\Lambda \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{h}_\infty^{ord}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-modules.*

Démonstration. Soit $s > 0$ et x, y deux éléments de $\mathcal{W}_\infty^{ord}$. L'accouplement

$$(x_{s+1}|T(p)_*^s y_{s+1})_{s+1}$$

appartient à $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s+1]/F)]$. D'après les lemmes 1.4.21 et 1.4.22, la projection de

$$(x_{s+1}|T(p)_*^s y_{s+1})_{s+1}$$

dans $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F[s+1]/F)]$ est égale à $(x_s|T(p)_*^{s-1}y_s)_s$. L'accouplement Λ-valué

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot) : & e\mathcal{W} \times e\mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)]] \\ & (x,y) & \longmapsto & ((x_s|T(p)_*^{s-1}y_s)_s)_s \end{array}$$

est donc bien défini. Pour tout $s > 0$, nous disposons d'isomorphismes ϕ_s :

$$\phi_s : \mathcal{W}_s^{ord} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\mathcal{G}_s]}(\mathcal{W}_s^{ord}, \mathcal{O}[\mathcal{G}_s])$$

Si nous notons $\Lambda_s = \mathcal{O}[G_s/(G_s)_{tors}]$, les $\mathfrak{h}_\infty^{ord}$-modules suivants sont isomorphes.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\mathcal{G}_s]}(\mathcal{W}_s^{ord}, \mathcal{O}[\mathcal{G}_s]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda_s}(\mathcal{W}_s^{ord}, \Lambda_s)$$

Le morphisme $\phi = (\phi_s)_s$ peut donc être vu comme un isomorphisme :

$$\phi : \mathcal{W}_\infty^{ord} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{W}_\infty^{ord}, \Lambda)$$

La construction de $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ à partir de $(\cdot,\cdot)$ n'affecte pas l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ donc l'accouplement $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ et l'isomorphisme ϕ sont compatibles avec la structure de $\Lambda[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module de $\mathcal{W}_\infty^{ord}$. □

Accouplement et dualité pour $\mathcal{W}_\infty^{dual}$

Considérons l'algèbre de Hecke $\mathfrak{h}_s^{dual}$ engendrée par les opérateurs de Hecke en $v \nmid (p)$, les opérateurs diamants et les opérateurs $T(v)^{dual}$ en $v|(p)$ donnés par le choix explicite dual de (1.4.3.1), c'est-à-dire par :

$$T(v)^{dual} = [U_s \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_s] \tag{1.4.4.11}$$

Soit :

$$e^{dual} = \lim_{n\to\infty} (T(p)^{dual})^{n!} \in \mathfrak{h}_s^{dual}$$

La lecture des sous-sections 1.4.3 et 1.4.4 montre que le choix explicite de $T(v)$ n'intervient que dans la mesure où il impose un choix d'application de dégénérescence entre $W_{U_{s+1}}$ et W_{U_s}, voir en particulier le lemme 1.4.18. Les résultats de la sous-section 1.4.4 demeurent donc vrais pour $\mathfrak{h}_s^{dual}$ agissant sur $e^{dual}\mathcal{W}_s$ en échangeant π_1 et π_g. La formule $W_s \circ \pi_1 = \pi_g \circ W_{s+1}$ montre que cette opération revient à appliquer partout l'involution W_s et à utiliser le fait que

$$\mathcal{W}_\infty^{dual} = \varprojlim_{\pi_{1*}} e^{dual}\mathcal{W}_s$$

est isomorphe à $\mathcal{W}_\infty^{ord}$ en tant que $\mathcal{O}$-module. Nous énonçons à nouveau la proposition 1.4.23 dans ce contexte.

Proposition 1.4.24. *Soit* $\mathcal{W}_\infty^{dual} = \varprojlim_{\pi_{1*}} e^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O})$. *Soit :*

$$\Lambda = \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)]]$$

Le $\Lambda[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-module* $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ *est muni de l'accouplement alterné* $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ *suivant :*

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot)_\Lambda : & \mathcal{W}_\infty^{dual} \times \mathcal{W}_\infty^{dual} & \longrightarrow & \Lambda(-1)<-1> \\ & (x,y) & \longmapsto & ((x_s|T(p)_*^{s-1} y_s)_s)_s \end{array}$$

L'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{W}_\infty^{dual} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{W}_\infty^{dual}, \Lambda)(-1)<-1> \\ & x & \longmapsto & (x|\cdot)_\Lambda \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-modules.*

1.4.5 Théorie de Hida

Points arithmétiques de Λ

Nous rappelons que le caractère χ_∞ induit une représentation à valeurs dans $\Lambda^\times$:

$$\chi_\infty : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \Lambda^\times$$

Soit k un entier supérieur à 2, $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $L_{\mathfrak{p}}$ et $\Lambda' = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$. Fixons un scindage de la surjection canonique

$$\mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \twoheadrightarrow \Gamma$$

compatible via le caractère cyclotomique avec le scindage canonique de

$$\mathbb{Z}_p^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^\times/(\mathbb{Z}_p)^\times_{\mathrm{tors}}$$

Soit

$$\chi : \mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \longrightarrow (\mathcal{O}')^\times$$

un caractère d'ordre fini. Notre choix de scindage et les deux projections

$$\mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \longrightarrow \Gamma$$
$$\mathrm{Gal}(F[\infty]/F) \longrightarrow \Delta$$

définissent deux caractères d'ordre fini :

$$\chi_{wild} : \Gamma \longrightarrow \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}')$$

$$\chi_{tame} : \Delta \longrightarrow \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}')$$

Soit γ un générateur topologique de la partie libre du groupe $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$. Nous appelons la spécialisation arithmétique $\mathbf{Sp}_{\mathcal{P}}$ de Λ de poids k et de caractère χ à valeurs dans $\mathcal{O}'$ le morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres à valeurs dans $\mathcal{O}'$ de la forme suivante :

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{Sp}_{\mathcal{P}} : & \Lambda & \longrightarrow & \mathcal{O}' \\ & \gamma & \longmapsto & \chi_{wild}(\gamma)\gamma^{k-2} \\ & \delta & \longmapsto & \chi_{tame}(\delta) \end{array}$$

Dans le membre de droite de $\gamma \mapsto \chi_{wild}(\gamma)\gamma^{k-2}$, le terme γ est considéré comme un élément de $\mathcal{O}'$ par l'inclusion :

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} 1 + p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathcal{O}'$$

Soit $\mathcal{P}$ le noyau de $\mathbf{Sp}_{\mathcal{P}}$. L'idéal $\mathcal{P} \cap \mathcal{O}'[[\Gamma]]$ est un idéal premier de hauteur 1 de $\mathcal{O}'[[\Gamma]]$ engendré par $P_{k,\chi} = \chi_\Gamma(\gamma) - \chi_{wild}(\gamma)\gamma^{k-2}$. Soit

$$\mathrm{Spec}^{arith}(\Lambda) \subset \mathrm{Spec}(\Lambda)$$

l'ensemble des points arithmétiques, c'est-à-dire des idéaux premiers $\mathcal{P}$ qui sont les noyaux des spécialisations arithmétiques de Λ. Si A est une Λ-algèbre finie, un point arithmétique $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(A)$ de A est un idéal premier tel que :

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{O}'[[\Gamma]] = P_{k,\chi}$$

Une spécialisation arithmétique de A à valeurs dans $\mathcal{O}'$ est un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres de A dans $\mathcal{O}'$ dont le noyau $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(A)$ est un point arithmétique. Si

$\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(A) \cap \mathcal{O}'[[\Gamma]]$ est au-dessus de $(P_{k,\chi})$, nous disons que $\mathcal{P}$ est de poids k et de caractère χ.

Si $\mathcal{P}$ est un point arithmétique de Λ à valeurs dans $\mathcal{O}'$ comme ci-dessus, alors :

$$\Lambda/\mathcal{P}\Lambda \hookrightarrow \mathcal{O}'$$

La donnée d'un point arithmétique de Λ, d'un ensemble E et d'une application

$$\phi : E \longrightarrow \Lambda$$

fournit donc une application :

$$\begin{aligned} \phi : \quad E &\longrightarrow \mathcal{O}' \\ x &\longmapsto x \bmod \mathcal{P} \end{aligned}$$

En particulier, la donnée d'un point arithmétique de Λ fournit une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ à coefficients dans $(\mathcal{O}')^\times$ par :

$$\chi_\infty \bmod \mathcal{P} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow (\mathcal{O}')^\times$$

Représentation galoisienne provenant de $\mathcal{W}_\infty^{dual}$

L'algèbre $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ est égale au produit de ses localisations en ses idéaux maximaux.

$$\mathfrak{h}_\infty^{dual} = \prod_{\mathfrak{m}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$$

Soit $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ l'un des facteurs locaux de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ et

$$\lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{h}_\infty^{dual} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$$

le morphisme canonique qui lui est associé. Nous voulons étudier les représentations galoisiennes associées aux objets suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\infty^{dual} &= \varprojlim_{\pi_{1*}} e^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}) \\ \mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual} &= \mathcal{W}_\infty^{dual} \otimes_{\mathfrak{h}_\infty^{dual}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual} \end{aligned}$$

Proposition 1.4.25. *Le $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est libre de rang fini.*

Démonstration. Soit ϖ l'uniformisante de $\mathcal{O}$. Soit s et t des entiers positifs. Le groupe

$$e^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t)$$

est fini donc $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est un groupe pro-fini donc compact. Soit r un entier supérieur à s. Nous supposons que s est suffisamment grand pour que le revêtement

$$\begin{array}{c} M_{1,0}(\mathcal{N}, P^r) \\ \big\downarrow \\ M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \end{array}$$

soit non-ramifié. Soit Γ_s le plus grand sous-groupe de Γ tel que Γ_s agisse trivialement sur $H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t)$. Si r est un entier supérieur à s, la suite exacte de Hochschild-Serre s'écrit :

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow H^1(\Gamma_s/\Gamma_r, H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^r) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t(1))) \longrightarrow \\ &H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t(1)) \longrightarrow H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}P^r) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t(1))^{\Gamma_s/\Gamma_r} \\ &\longrightarrow H^2(\Gamma_s/\Gamma_r, H^0(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^r), \mathcal{O}/\varpi^t(1))) \end{aligned}$$

Le premier et le dernier terme de cette suite sont des p-groupes finis donc :

$$\begin{array}{c} e^{ord} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t(1)) \\ \downarrow \wr \\ e^{ord} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^r) \otimes_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi^t(1))^{\Gamma_s/\Gamma_r} \end{array}$$

En prenant la limite directe sur r et sur t selon π_1^*, nous obtenons :

$$e^{ord} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}, L_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}(1)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r e^{ord} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^r) \otimes_F \bar{F}, L_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}(1))^{\Gamma_s}$$

La dualité de Poincaré donne alors :

$$\mathcal{W}_s^{dual} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{W}_\infty^{dual})_{\Gamma_s} \tag{1.4.5.1}$$

Le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$-module $\mathcal{W}_s^{dual}$ est de type fini donc

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}/\mathfrak{m}\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$$

est fini. Soit γ_s un générateur topologique de Γ_s. L'élément $\gamma_s - 1$ appartient à $\mathfrak{m}$. Donc

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}/(\gamma_s - 1))/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}/\mathfrak{m}\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$$

est fini. Donc $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est de type fini sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$. Le $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ et de type fini donc $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est de type fini sur $\mathcal{O}[[\Gamma]]$. D'après la proposition 1.4.24, le $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est réflexif. L'anneau $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ est régulier de dimension 2 donc les modules réflexifs sur $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ sont libres. Le $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est donc libre de rang fini. □

L'hypothèse suivante est essentielle pour notre étude.

Hypothèse 1.4.26. *La représentation résiduelle de* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$$

est irréductible.

Le nombre premier p étant impair, la représentation résiduelle de $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est absolument irréductible. Nous avons vu dans la sous-section 1.3.1 et en particulier en (1.3.1.1) que la représentation résiduelle de $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ était égale à la représentation résiduelle d'une forme modulaire de Hilbert f ordinaire p-stabilisée de poids parallèles 2. C'est pourquoi nous notons $\bar{\rho}_f$ la représentation $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$. Pour s plus grand que 1, soit $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ le quotient de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ au travers duquel se factorise l'action de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ sur $\mathcal{W}_{s}^{dual}$ se factorise.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}} &= (\mathcal{W}_{s}^{dual} \otimes_{\mathfrak{h}_{\infty}^{dual}} \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}) \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}} \\ &= e^{dual} H_{et}^{1}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^{s}) \otimes_{F} \bar{F}, L_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

La décomposition de Hodge de la réalisation complexe de la cohomologie de

$$M_{1,0}(\mathcal{N}, P^{s})$$

et le théorème de comparaison entre les réalisations étales et complexes montrent que la représentation $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}$ est un $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang 2. Voir par exemple [Sai99]. Soit v une place finie ne divisant pas $\mathcal{N}(p)$ et n'appartenant pas à S_B. D'après la relation d'Eichler-Shimura (1.3.1.3) :

$$\det(1 - \mathrm{Fr}(v)X | \mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}) = 1 - \lambda_{\mathfrak{m}}(T(v))X + < \varpi_v > N_{F/\mathbb{Q}}(\varpi_v)X^2$$

Soit ρ la pseudo-représentation de degré 2 à coefficients dans $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ de trace $\lambda_{\mathfrak{m}}$. La représentation $\bar{\rho}_f$ est absolument irréductible d'après l'hypothèse 1.4.26 et à la même trace que $\bar{\rho}$. D'après le théorème 1 de [Nys96], il existe donc une représentation

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual})$$

de trace $\lambda_{\mathfrak{m}}$. La trace de $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}$ est égale à la trace de $\rho \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}$ et $\bar{\rho}_f$ est irréductible. D'après le théorème 1 de [Car94], nous avons donc un isomorphisme de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module :

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \rho \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}} \tag{1.4.5.2}$$

L'image de $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ dans $(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}})^2$ est donc un sous-$\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ module stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et dont l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ est donnée par ρ. Comme dans le théorème 4 de [Car94], l'irréductibilité de $\bar{\rho}_f$ suffit alors à établir qu'il existe un idéal J de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ tel que :

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \xrightarrow{\sim} \rho \otimes_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}} J \tag{1.4.5.3}$$

Après produit tensoriel de $\mathcal{O}$ à $L_{\mathfrak{p}}$, l'isomorphisme (1.4.5.3) redonne l'isomorphisme (1.4.5.2). L'idéal J est donc un $\mathcal{O}$-réseau de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathcal{O}} L_{\mathfrak{p}}$.

Le module $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est muni d'après le proposition 1.4.19 d'un accouplement non-dégénéré induisant un isomorphisme de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module :

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}, \mathcal{O})(-1) < -1 >$$

Cet accouplement induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module :

$$\phi : J^2 \xrightarrow{\sim} [\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(J,\mathcal{O})(-1)<-1>]^2$$

L'isomorphisme ϕ commute avec $\bar{\rho}_f$ qui est absolument irréductible donc est scalaire d'après le lemme de Schur. Donc :

$$J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(J,\mathcal{O})(-1)<-1> \tag{1.4.5.4}$$

Proposition 1.4.27. *Supposons que $\mathfrak{m}$ vérifie l'hypothèse 1.4.26. Le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}$-espace vectoriel*

$$e^{dual}H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s),\mathcal{O}/\varpi)[\mathfrak{m}]$$

se décompose en une somme de n sous-espaces $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-stables de dimension 2 isomorphes à $\bar{\rho}_f$. L'entier n est égal au nombre de générateur de J. Lorsque n est égal à 1, nous disons que $\bar{\rho}_f$ intervient avec multiplicité 1 au niveau s.

Supposons que $\bar{\rho}_f$ intervienne avec multiplicité 1 au niveau s. L'anneau $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est alors un anneau de Gorenstein. Le $\mathcal{O}[\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}][\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}\otimes_{\mathfrak{h}_\infty^{dual}}\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$$

est libre de rang 2 sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. Soit v une place finie ne divisant pas $\mathcal{N}(p)$ et n'appartenant pas à S_B. Soit $\lambda_{\mathfrak{m},s}(T(v))$ l'image de $\lambda_{\mathfrak{m}}(T(v))$ dans $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. Alors :

$$\det(1-\mathrm{Fr}(v)X|\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}) = 1-\lambda_{\mathfrak{m},s}(T(v))X + <\varpi_v>N_{F/\mathbb{Q}}(\varpi_v)X^2$$

Démonstration. Nous suivons toujours l'article [Car94]. Soit n le nombre minimal de générateurs de J. D'après la proposition 1.4.19, le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}$-espace vectoriel

$$e^{dual}H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s),\mathcal{O}/\varpi)[\mathfrak{m}]$$

est isomorphe au quotient de son dual par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. D'après les assertions (1.4.5.3) et (1.4.5.4), les deux $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$-modules suivants sont donc isomorphes :

$$\begin{aligned} e^{dual}H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s),\mathcal{O}/\varpi)[\mathfrak{m}] &\xrightarrow{\sim} (J/\mathfrak{m}J)^2 \\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{F}^2 \end{aligned}$$

La représentation $\bar{\rho}_f$ étant absolument irréductible, chacune des représentations galoisiennes $\mathbb{F}^2$ de la somme directe ci-dessus est isomorphe à $\bar{\rho}_f$.

Supposons que n soit égal à 1. Alors J est un idéal de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ qui est un $\mathcal{O}$-réseau principal donc est libre de rang 1 sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. Donc $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est libre de rang 2 sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. De plus, l'isomorphisme (1.4.5.4) induit un isomorphisme :

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual},\mathcal{O})$$

L'anneau $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est donc un anneau de Gorenstein. La description de l'action galoisienne de $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ découle de (1.4.5.3) pour le cas J libre de rang 1 sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. □

Hypothèse 1.4.28. *Pour s assez grand, le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}/\mathfrak{m}$-espace vectoriel*

$$e^{dual}H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s),\mathcal{O}/\varpi)[\mathfrak{m}]$$

est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension 2.

Sous l'hypothèse 1.4.28, le facteur local $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ admet des spécialisations nouvelles en $\mathcal{N}$. De plus, le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$-module $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est libre de rang 2 pour s assez grand. Donc le $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$-module $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est libre de rang 2 sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$. D'après la proposition 1.4.25, le $\mathcal{O}[[\Gamma]]$-module $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est donc libre de rang fini. Pour s assez grand, l'assertion (1.4.5.1) montre alors que :

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}/(\gamma_s-1)\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$$

D'après la proposition 1.4.27, l'anneau $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$ est de Gorenstein pour s assez grand donc est son propre module dualisant. Donc $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}/(\gamma_s-1)\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est le module dualisant de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m},s}^{dual}$. D'après le lemme page 249 de [MW86], le module dualisant de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est alors $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$, et l'anneau $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est donc de Gorenstein.

Hypothèse 1.4.29. *Le facteur local $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ est un anneau intègre.*

L'hypothèse 1.4.29 se révèle essentielle pour l'application de la méthode des systèmes d'Euler que nous conduisons dans la seconde partie. Aussi supposons-nous dès à présent qu'elle est vérifiée. Sous les hypothèses 1.4.28 et 1.4.29, toutes les spécialisations sont nouvelles en $\mathcal{N}$.

Familles de formes modulaires ordinaires

Soit $\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$ à valeurs dans $\mathcal{O}$ de poids 2, de caractère ϵ et de niveau s. Soit $\mathfrak{h}_{\epsilon,s}^{dual}$ l'algèbre de Hecke de niveau s agissant via le caractère ϵ. D'après le théorème 3.4 de [Hid88] :

$$(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual})_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual})_{\mathcal{P}}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{h}_{\epsilon,s}^{dual}\otimes_{\mathcal{O}}L_{\mathfrak{p}}$$

D'après le corollaire 3.5 de ce même article, le morphisme

$$\lambda_{\mathcal{P}}:\mathfrak{h}_{\epsilon,s}^{dual}\otimes_{\mathcal{O}}L_{\mathfrak{p}}\longrightarrow L_{\mathfrak{p}}$$

est le système de valeurs propres d'une représentation cuspidal irréductible unitaire des points adéliques de $B^\times$. Par la correspondance de Jacquet-Langlands, nous pouvons choisir de voir cette représentation comme une forme modulaire de Hilbert parabolique de poids parallèles 2. Nous notonts $f_{\mathcal{P}}$ cette forme modulaire et $V(f_{\mathcal{P}})$ sa représentation galoisienne.

Réciproquement, soit i_∞ et i_p les plongements fixés de la sous-section 1.3.3. Nous disons que f est une forme modulaire de Hilbert parabolique propre ordinaire si et seulement si elle vérifie $|i_p(\lambda_f(\varpi_v))|_p=1$ pour tout $v|(p)$. Soit f une forme modulaire ordinaire. D'après le corollaire 3.5 de [Hid88], il existe alors un point arithmétique $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(\mathfrak{h}_\infty^{dual})$ tel que le système de valeur propres λ_f coïncide avec le morphisme $\lambda_{\mathcal{P}}$.

A chaque spécialisation arithmétique à valeurs dans $\mathcal{O}'$ et de noyau un point arithmétique $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(\mathfrak{h}_\infty^{dual})$ est associé un morphisme :

$$\lambda_{\mathcal{P}} : \mathfrak{h}_\infty^{dual} \longrightarrow \mathcal{O}'$$

Ce morphisme se factorise à travers un unique facteur local de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$. A partir de maintenant, nous supposons que toutes les spécialisations arithmétiques se factorise à travers $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$. Une spécialisation $\mathbf{Sp}$ définit en particulier un caractère $\omega_{\mathbf{Sp},tame}$

$$\omega_{\mathbf{Sp},tame} : \Delta \longrightarrow \mathcal{O}'$$

du groupe Δ. La représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathbf{Sp}} \mathcal{O}'$$

vérifie :

$$\begin{aligned}\det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)|\mathcal{W}_{\mathfrak{m},s}^{dual} \otimes_{\mathbf{Sp}} \mathcal{O}') =& 1 - (\lambda_{\mathfrak{m}}(T(v)) \bmod \mathcal{P})X + \\ & \omega_{\mathbf{Sp},tame}(\mathrm{Fr}(v))(\chi_\Gamma(\mathrm{Fr}(v)) \bmod \mathcal{P})(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)X^2\end{aligned}$$

Considérons $\mathbf{Sp}$ et $\mathbf{Sp}'$ deux spécialisations arithmétiques de même poids et à valeurs dans un même anneau de valuation discrète. Les représentations résiduelles de

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual} \otimes_{\mathbf{Sp}} \mathcal{O}'$$

et de

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual} \otimes_{\mathbf{Sp}'} \mathcal{O}'$$

sont égales. Les caractères $\omega_{\mathbf{Sp},tame}$ et $\omega_{\mathbf{Sp}',tame}$ sont donc égaux. Nous notons en particulier $\omega_{f,tame}$ le caractère modéré de la représentation $\bar{\rho}_f$.

Nous avons mentionné dans la section 1.1 que la méthode des systèmes d'Euler/Kolyvagin est bien comprise dans le cas quadratique lorsque elle est appliquée à une représentation auto-duale. Notre but ultime étant de construire et d'étudier des systèmes de Kolyvagin pour les tours de courbes de Shimura, nous souhaitons construire des représentations auto-duales. Dans le cas classique où F est égal à $\mathbb{Q}$, ceci est toujours possible en tordant éventuellement la représentation $\mathcal{W}_\infty^{dual}$. Cela provient du fait que la suite exacte (1.4.4.4) définissant G_∞ devient :

$$\mathbb{Z}_p^\times/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} G_\infty$$

La 2-torsion du groupe $\mathbb{Z}_p^\times/\{\pm 1\}$ est réduite à $\{\pm 1\}$. Tous les caractères de la partie de torsion de G_∞ des représentations de poids pairs sont donc triviaux sur la 2-torsion et sont donc des carrés. C'est en particulier le cas pour $\omega_{f,tame}$. En général, aussi bien $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F)$ que $\prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}^\times/\bar{\mathcal{O}}_F^\times$ peuvent avoir de la 2-torsion. Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.4.30. *Il existe un caractère*

$$\chi : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

tel que $\chi^2 = \omega_{f,tame}$. *Nous choisissons un tel* χ.

L'hypothèse 1.4.30 est en particulier toujours vérifiée si Δ n'a pas de 2-torsion.

Théorème 1. *Soit* p *un nombre premier rationnel impair. Soit* R *un facteur local de* $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ *vérifiant les hypothèses 1.4.26, 1.4.28, 1.4.29 et 1.4.30. Soit :*

$$\mathcal{W}_\infty^{dual}(R) = \varprojlim_{\pi_{1*}} e^{dual} H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s), \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{h}_\infty^{dual}} R$$

Alors $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)$ *est libre de rang 2 sur* R. *La représentation*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_R(\mathcal{W}_\infty^{dual}(R))$$

est non-ramifiée en dehors de $\mathcal{N}(p) \cup S_B$. *Soit* v *finie ne divisant pas* $\mathcal{N}(p)$ *et n'appartenant pas à* S_B. *Alors :*

$$\det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)|\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)) = 1 - \lambda_{\mathfrak{m}}(T(v))X + \omega_{tame}(\mathrm{Fr}(v))\chi_\Gamma(\mathrm{Fr}(v))(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)X^2 \tag{1.4.5.5}$$

Le module $\mathcal{T} = \mathcal{W}_\infty^{dual}(R)(1) \otimes \chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}$ *est un* $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-module, libre de rang 2 sur* R *muni d'un accouplement* R*-bilinéaire antisymétrique :*

$$(\cdot|\cdot) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow R(1)$$

Cet accouplement induit un isomorphisme de $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$*-modules :*

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, R)(1)$$

Démonstration. Soit v une place finie de F ne divisant pas $\mathcal{N}(p)$ et n'appartenant pas à S_B. Pour tout point arithmétique $\mathcal{P}$ de poids 2, l'action de $\mathrm{Fr}(v)$ sur $\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{dual} \otimes_R R_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$ est celle de $\mathrm{Fr}(v)$ sur $V(f_{\mathcal{P}})$ donc est donnée par :

$$\det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)) = 1 - \lambda_{\mathcal{P}}(T(v))X + \omega_{\mathcal{P},tame}(\mathrm{Fr}(v))\omega_{\mathcal{P},wild}(\mathrm{Fr}(v))(N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v)^{k-1}X^2$$

Les points arithmétiques de poids 2 sont denses dans $\mathrm{Spec}(R)$ pour la topologie de Zariski donc l'action de $\mathrm{Fr}(v)$ sur $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R) \otimes_R \mathrm{Frac}(R)$ est donnée par (1.4.5.5). Nous avons vu que sous l'hypothèse 1.4.28, le R-module $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)$ est libre de rang 2. Donc la représentation $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)$ est donnée par (1.4.5.5).

Le nombre premier p étant impair, Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et est uniquement 2-divisible. Soit $\chi_\Gamma^{-1/2}$ le caractère à valeurs dans Λ défini par $\chi_\Gamma^{-1/2}(x) = \chi_\Gamma(-x/2)$. Par hypothèse, le caractère χ vérifie :

$$\chi^2 = \omega_{f,tame}$$

Soit :
$$\mathcal{T} = \mathcal{W}_\infty^{dual}(R)(1) \otimes \chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}$$
D'après la première partie de la preuve, le module $\mathcal{T}$ est libre de rang 2 sur R et le déterminant de $\mathcal{W}_\infty^{dual}(R)$ est donné par :

$$\det \mathcal{W}_\infty^{dual}(R) = R(-1) \otimes \omega_{tame}\chi_\Gamma$$

Le déterminant de $\mathcal{T}$ vérifie donc :

$$\det \mathcal{T} = R(1) \otimes \omega_{tame}\chi^{-2}\chi_\Gamma\chi_\Gamma^{-1} = R(1)$$

D'après la proposition 1.4.23, le module $\mathcal{W}_\infty^{dual}$ est muni d'un accouplement :

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot)_\Lambda : & \mathcal{W}_\infty^{dual} \times \mathcal{W}_\infty^{dual} & \longrightarrow & \Lambda(-1)<-1> \\ & (x,y) & \longmapsto & ((x_s|T(p)_*^{s-1}y_s)_s)_{s>0} \end{array}$$

Nous remarquons que par définition, tordre par $<-1>$ sur Λ signifie tordre par χ_∞ donc revient à tordre par $\chi_\Gamma\omega_{tame}$ sur R. Le module $\mathcal{T}$ est donc muni d'un accouplement :

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot) : & \mathcal{T} \times \mathcal{T} & \longrightarrow & \Lambda(1) \\ & (x,y) & \longmapsto & ((x_s|T(p)_*^{s-1}y_s)_s)_{s>0} \end{array}$$

Cet accouplement induit un isomorphisme de $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-modules :

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{T},\Lambda)(1)$$

Les R-modules $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{T},\Lambda)$ et $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{T},\mathrm{Hom}_\Lambda(R,\Lambda))$ sont canoniquement isomorphes donc :
$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T},\mathrm{Hom}_\Lambda(R,\Lambda))(1)$$
L'anneau R est de Gorenstein. Choisissons un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(R,\Lambda) \xrightarrow{\sim} R$$

Ce choix induit un isomorphisme :

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T},R)(1)$$

□

Ce théorème montre que la cohomologie de la tour $\{M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\}$ interpole les représentations des familles ordinaires de formes modulaires de Hilbert dans l'image de la correspondance de Jacquet-Langlands. D'après le théorème de densité de Chebotarev, la représentation $\mathcal{W}_\mathfrak{m}^{dual}$ est donc la représentation duale de de la représentation construite dans [Wil88], théorème 2.2.1 et 2.2.2. Nous n'obtenons pas une représentation isomorphe car Wiles travaille avec les morphismes de Frobenius arithmétiques alors que nous utilisons les morphismes de Frobenius géométriques.

1.5 Construction d'un système d'Euler pour $\mathcal{T}$

1.5.1 Points CM sur la tour $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$

Généralités sur les points CM

L'objectif de ce paragraphe est de rassembler certains faits généraux sur les points CM sur les courbes de Shimura dont nous faisons un usage extensif pour le cas particulier de la tour de courbes $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$. Nous suivons [CV05] et [Nek04]. Soit H un sous-groupe compact ouvert de $\widehat{B}^\times$ vérifiant l'hypothèse 1.2.1 et M_H la courbe de Shimura qui lui est associée. Dans le cas classique où $F = \mathbb{Q}$ et $S_B = \emptyset$, nous rappelons que nous notons M_H la courbe de Shimura compacte associée à la donnée (B, X) et au groupe H.

Soit K une extension quadratique totalement imaginaire fixée de F telle que toute place de S_B ramifie ou bien soit inerte dans K/F. Cette hypothèse implique qu'il existe un morphisme injectif q de F-algèbres :

$$q : K \hookrightarrow B$$

Nous fixons un tel plongement q. D'après le théorème de Skolem-Noether, les autres F-plongements de K dans B sont conjugués à q par un élément de $B^\times$. Pour v finie, nous notons q_v le plongement

$$q_v \ : \ K \otimes_F F_v \hookrightarrow B_v$$

et $\widehat{q}$ le plongement :

$$\widehat{q} \ : \ \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{B}$$

Pour v une place finie de F, nous notons K_v et $\mathcal{O}_{K,v}$ les anneaux :

$$K_v = K \otimes_F F_v, \quad \mathcal{O}_{K,v} = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F,v}$$

Si v n'appartient pas à S_B, le plongement q_v induit un plongement de K_v dans $\mathrm{GL}_2(F_v)$. L'image de K_v est un F_v-espace vectoriel de dimension 2 donc l'image de K_v n'est pas scalaire et stabilise une droite si et seulement s'il existe un $x \in K_v - F_v$ qui stabilise cette droite. Nous fixons également un plongement de $\bar{K}$ dans $\mathbb{C}$ prolongeant :

$$\tau_1 : F \hookrightarrow \mathbb{R}$$

Via ce plongement, le corps $K^\times$ agit sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ par :

$$q(K^\times) \subset B^\times \subset B^\times \otimes_{\tau_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Lemme 1.5.1. *Il existe un unique élément $\mathcal{Z}_K$ dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ et de partie imaginaire strictement positive fixé par l'action de $K^\times$. De plus :*

$$q(K^\times) = \{\lambda \in B^\times | \lambda(\mathcal{Z}_K) = \mathcal{Z}_K\}$$

Démonstration. Soit $x \in K - F$. Alors x appartient à $K^\times$ donc agit sur :

$$\mathbb{C} - \mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

l'image de x par q_{τ_1}. L'élément x appartient à une extension quadratique totalement imaginaire donc le corps de rupture du polynôme caractéristique de $q_{\tau_1}(x)$ est totalement imaginaire donc $(d-a)^2 + 4bc < 0$. Il existe donc un unique z de partie imaginaire strictement positive vérifiant

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

ou de façon équivalente, un unique z de partie imaginaire strictement positive fixé par l'action de $q(x)$. Mais alors z est également fixé par μx pour tout $\mu \in F^\times$ et par

$$\begin{pmatrix} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{pmatrix}$$

donc par $\lambda + \mu x$ avec $\lambda \in F$. Il est donc fixé par tous les éléments de $K^\times$.

Réciproquement, si $\lambda \in B^\times$ fixe z, les mêmes opérations que dans la première partie de la preuve mais menées en sens inverse montrent que λ est dans l'image de $K^\times$. □

L'ensemble des points CM relatifs à K de M_H est le sous-ensemble de M_H^{an} suivant :

$$CM(M_H, K) = \{x = [\mathcal{Z}_K, b] \in B^\times \backslash X \times \widehat{B}^\times / H | b \in \widehat{B}^\times\}$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de q car deux F-plongements de K dans B sont conjugués par un élément de $B^\times$. L'extension K étant fixe dans ce qui suit, nous appelons points CM les points CM relatifs à K et notons $\mathcal{Z}$ pour $\mathcal{Z}_K$.

L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $CM(M_H, K)$ est donnée par la loi de réciprocité de Shimura, rappelée dans la proposition suivante.

Proposition 1.5.2. *Les points CM de M_H sont définis sur K^{ab}. Soit $a \in \widehat{K}^\times$ et $x = [\mathcal{Z}, b]$ un point CM. Alors :*

$$\mathrm{rec}_K(a) \cdot [\mathcal{Z}, b] = [\mathcal{Z}, \widehat{q}(a)b]$$

En particulier, le corps $K(x)$ de définition de x est une extension abélienne de K et rec_K induit un isomorphisme :

$$K^\times \backslash \widehat{K}^\times / \widehat{q}^{-1}(bHb^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K(x)/K)$$

Nous disposons des informations nécessaires pour terminer la démonstration de la proposition 1.4.8, que nous avions laissée en suspens.

Proposition 1.5.3. *L'involution $-alt$ sur la courbe $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ est définie sur $F[s]$.*

Démonstration. Soit $[\mathcal{Z}, b]$ un point CM sur $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et a appartenant à $\widehat{K}^\times$. Alors :

$$\begin{aligned} -alt \circ \mathrm{rec}_K(a)[\mathcal{Z}, b] &= -alt[\mathcal{Z}, \widehat{q}(a)b] \\ &= [\mathcal{Z}, \widehat{q}(a)b^{-alt}\frac{1}{N_{K/F}a}] \end{aligned}$$

Supposons que $\mathrm{rec}_K\, a$ fixe $F[s]$. Alors $N_{K/F}(a)_v$ vérifie

$$N_{K/F}(a_v) \in 1 + \varpi_v^s \mathcal{O}_{F,v}$$

pour tout v divisant (p). Donc $N_{K/F}a$ appartient à $U_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ et donc :

$$\begin{aligned} -alt \circ \mathrm{rec}_K(a)[\mathcal{Z}, b] &= [\mathcal{Z}, \widehat{q}(a)b^{-alt}] \\ &= \mathrm{rec}_K(a) \circ -alt[\mathcal{Z}, b] \end{aligned}$$

L'ensemble $CM(M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s), K)$ est dense dans $M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s)$ pour la topologie de Zariski donc $-alt$ est défini sur $F[s]K$. Le choix de deux corps K_1 et K_2 distincts tels que $CM(M_{1,1}(\mathcal{N}, P^s), K_i)$ soit non-vide montre que $-alt$ est défini sur $F[s]$. □

Une famille de points sur la tour $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$

Nous reprenons les notations de la section 1.4. Soit donc $\mathcal{N}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ premier à S_B. Soit p un nombre premier rationnel impair tel que l'idéal $(p) = p\mathcal{O}_F$ soit premier à $\mathcal{N} \cup S_B$. Nous rappelons qu'une donnée $D_{1,0}$ dans la définition 1.4.1 est la donnée de certains objets en chaque place v de F. Une donnée $D_{1,0}$ est dite compatible à q en v une place finie si et seulement si :

$$q_v^{-1}(R(v)^\times) = \mathcal{O}_{K,v}^\times$$

Une donnée $D_{1,0}$ comme dans la définition 1.4.1 est dite compatible à q en (p) une place finie si elle est compatible en toutes les places divisant (p). Le groupe $R(v)^\times$ étant compact, une donnée est compatible à q en v si et seulement si l'image réciproque de $R(v)^\times$ par q_v est la plus grande possible. Pour tout p, il existe des plongements q tels que $D_{1,0}$ soit compatible en (p). Si q est fixé, presque tous les p admettent des données compatibles en p et $D_{1,0}$ est compatible à q en presque toute place finie v.

Soit $\{U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)\}_{s \geq 1}$ la tour de groupes $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ associée à une donnée $D_{1,0}$ compatible en (p). Une base propre associée à la donnée de q et de

$$D_{1,0}(v) = (R(v), M(v), L(v), D(v))$$

en $v|(p)$ est une $\mathcal{O}_{F,v}$-base (e_1, e_2) de $L(v)$ telle que e_1 appartienne à $D(v)$ et telle que $e_2 F_v$ ne soit pas stable par $q(K_v)$. L'image de K_v n'est pas scalaire donc il existe des bases propres.

Définition 1.5.4. *Soit $\mathcal{X}$ la famille*

$$\mathcal{X} = \{x(\mathfrak{c}, s) \in M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)^{an}\}$$

de points CM sur la tour de courbes $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ définie par les propriétés suivantes. En $v|(p)$, soit $(e_{v,1}, e_{v,2})$ une base propre de $L(v)$ fixée. Un point

$$x(\mathfrak{c}, s) = [\mathcal{Z}, b(\mathfrak{c}, s)] \in M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)^{an}$$

appartient à $\mathcal{X}$ si et seulement si $\mathfrak{c}$, s et $b(\mathfrak{c}, s)$ vérifient les propriétés suivantes :

1. *L'idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathcal{O}_F$ est premier à $\mathcal{N} \cup S_B$. Si v divise $\mathfrak{c}$ mais ne divise pas (p), alors v est inerte dans K et $D_{1,0}$ est compatible à q en v.*
2. *L'entier s est supérieur à 1.*
3. *Soit $v \nmid \mathfrak{c}(p)$. Alors $b(\mathfrak{c}, s)_v$ est égal à 1.*
4. *Soit $v|\mathfrak{c}$ et $v \nmid (p)$. Alors $b(\mathfrak{c}, s)_v$ appartient à $R(v) \cap B_v^\times$ et vérifie :*

$$\operatorname{ord}_{\varpi_v} nr(b(\mathfrak{c}, s)_v) = 1$$

5. *Soit $v|(p)$. Soit $t = \operatorname{ord}_{\varpi_v} \mathfrak{c}$. Alors $b(\mathfrak{c}, s)_v$ appartient à $R(v) \cap B_v^\times$. Soit (e_1, e_2) la $\mathcal{O}_{F,v}$-base propre de $L(v)$ associée à $\mathcal{X}$. Alors $b(\mathfrak{c}, s)_v$ s'écrit dans la base (e_1, e_2) :*

$$b(\mathfrak{c}, s)_v = \begin{pmatrix} \varpi^{s+t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, la famille $\mathcal{X}$ contient le point CM

$$x(1,1) = [\mathcal{Z}, b(1,1)] \in M_{1,0}(\mathcal{N}, P)$$

pour $b(1,1)$ trivial en dehors de (p) et égal à

$$b(1,1)_v = \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en v divisant (p).

En chaque place v de F, le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est inclus dans un sous-groupe compact ouvert maximal $H(v)$. Soit :

$$Z = \widehat{q}^{-1} \left(\prod_v H(v) \right)$$

Le groupe Z_v est un sous-groupe compact de $K_v^\times$ donc est inclus dans $\mathcal{O}_{K,v}^\times$ et est d'indice fini dans ce groupe. Soit K_Z l'extension de K définie par :

$$\operatorname{Gal}(K_Z/K) \xrightarrow{\sim} K^\times \backslash \widehat{K}^\times / Z$$

Si $Z = \widehat{\mathcal{O}}_K^\times$, l'extension K_Z est le corps de classe de Hilbert de K. En règle générale, l'extension K_Z est non-ramifiée en les places où $D_{1,0}$ est compatible à q. Soit $Z(\mathfrak{c}, s)$ le sous-groupe de Z défini par

$$Z(\mathfrak{c}, s) = \widehat{q}^{-1}(b(\mathfrak{c}, s)U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)b(\mathfrak{c}, s)^{-1})$$

et $K(\mathfrak{c}, s) = K(x(\mathfrak{c}, s))$. Alors :

$$\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s)/K) \xrightarrow{\sim} K^\times \backslash \widehat{K}^\times / Z(\mathfrak{c}, s)$$

En $v|(p)$, soit $U_0(s, v)$ le sous-groupe compact ouvert

$$U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v \subset U_0(s, v) \subset R(v)^\times$$

tel que $g \in R(v)^\times$ appartient à $U_0(s, v)$ si et seulement si g stabilise $D(v)/\varpi_v^s D(v)$. Soit $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ le sous-groupe compact ouvert de $\widehat{\mathcal{O}}_K^\times$ égal à $Z(\mathfrak{c}, s)_v$ en dehors de (p) et égal à $q_v^{-1}(b(\mathfrak{c}, s)U_0(s, v)b(\mathfrak{c}, s)^{-1})$ en $v|(p)$. Soit $K_0(\mathfrak{c}, s)$ l'extension de K définie par :

$$\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, s)/K) \xrightarrow{\sim} K^\times \backslash \widehat{K}^\times / Z_0(\mathfrak{c}, s)$$

Les sous-groupes

$$Z(\mathfrak{c}, s) \subset Z_0(\mathfrak{c}, s) \subset Z(\mathfrak{c}, s)$$

sont des sous-groupes ouverts du groupe compact $\widehat{\mathcal{O}}_K^\times$ donc sont d'indice finis. En particulier, les extensions

$$K_Z \subset K_0(\mathfrak{c}, s) \subset K(\mathfrak{c}, s)$$

sont des extensions finies du corps de classes de Hilbert de K. D'après la définition de $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)$ donnée en 1.4.1, le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_v$ est un sous-groupe compact ouvert maximal en $v \nmid \mathcal{N}\mathfrak{c}(p)$. En une telle place, l'élément $b(\mathfrak{c}, s)_v$ est l'identité donc $Z(\mathfrak{c}, s)_v = Z_0(\mathfrak{c}, s)_v = Z_v$ et ces trois groupes ne dépendent pas de s. En dehors de (p), les groupes $Z(\mathfrak{c}, s)$ et $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ sont égaux et ne dépendent pas de s. En $v|(p)$, le groupe $R(v)^\times$ contient l'image de $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ par q et cette image stabilise $D(v)$ donc $Z_0(\mathfrak{c}, s)_v$ contient $\mathcal{O}_{F,v}^\times$.

Lemme 1.5.5. *La suite courte suivante est exacte :*

$$1 \longrightarrow \frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z(\mathfrak{c}, s)} \longrightarrow \frac{Z_0(\mathfrak{c}, s)}{Z(\mathfrak{c}, s)} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s)/K_0(\mathfrak{c}, s)) \longrightarrow 1$$

De plus :

$$\frac{Z_0(\mathfrak{c}, s)}{Z(\mathfrak{c}, s)} = \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$$

Démonstration. L'exactitude de la suite est l'énoncé des lemmes 1.1.1 et 1.1.2 appliqués à $A = K^\times$, $B = Z_0(\mathfrak{c}, s)$ et $C = Z(\mathfrak{c}, s)$. En dehors de (p), les groupes

$Z_0(\mathfrak{c},s)_v$ et $Z(\mathfrak{c},s)_v$ sont égaux par définition. Soit donc $v|(p)$. Soit x appartenant à $Z_0(s,v)$.

$$q_v(x) \in b(\mathfrak{c},s)_v U_0(s,v) b(\mathfrak{c},s)_v^{-1}$$

Par définition, $U_0(s,v)$ stabilise $L(v)$. Soit (e_1,e_2) la $\mathcal{O}_{F,v}$-base propre de $L(v)$ associée à $\mathcal{X}$. Dans cette base, $q_v(x)$ s'écrit :

$$q_v(x) = b(\mathfrak{c},s)_v \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s)_v^{-1} = \begin{pmatrix} a & b\varpi_v^{s+t} \\ c/\varpi_v^{s+t} & d \end{pmatrix}$$

avec (a,b,c,d) dans $\mathcal{O}_{F,v}^4$. Le groupe $U_0(s,v)$ stabilise $D(v)/\varpi_v^s D(v)$ donc $c = c'\varpi_v^s$ avec $c' \in \mathcal{O}_{F,v}$ et :

$$q_v(x) = b(\mathfrak{c},s)_v \begin{pmatrix} a & b \\ c'\varpi_v^s & d \end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s)_v^{-1} = \begin{pmatrix} a & b\varpi_v^{s+t} \\ c'/\varpi_v^{t} & d \end{pmatrix}$$

Soit π l'application de $Z_0(s,v)$ dans $(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times$ qui à x associe la projection de $q(x)(e_1)$ sur D. En termes concrets :

$$\begin{aligned} \pi : \ Z_0(v) &\longrightarrow (\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times \\ x &\longmapsto q_v(x)_{1,1} \end{aligned}$$

L'application π est un morphisme de groupes car s est strictement positif. Le groupe $Z_0(s,v)$ contient $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ donc π est surjectif. Soit x dans le noyau de π. Dans la base (e_1,e_2), l'image de x s'écrit alors :

$$q_v(x) = \begin{pmatrix} 1+\varpi_v^s & b\varpi_v^{t+s} \\ c'/\varpi_v^t & d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$b(\mathfrak{c},s)_v^{-1} q_v(x) b(\mathfrak{c},s)_v = \begin{pmatrix} 1+\varpi_v^s & b \\ c\varpi_v^s & d \end{pmatrix} \in U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_v$$

Donc x appartient à $Z(s,v)$. Si réciproquement x appartient à $Z(s,v)$, alors il est dans le noyau de π. Donc :

$$Z_0(\mathfrak{c},s)/Z(\mathfrak{c},s) \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} (\mathcal{O}_{F,v}^\times/\varpi_v^s)^\times$$

□

Lemme 1.5.6. *Nous rappelons que d est le degré de F sur $\mathbb{Q}$. Soit $K_0(\mathfrak{c},\infty)$ l'union des extensions $K_0(\mathfrak{c},s)$ pour tout $s>0$. Il existe alors un groupe abélien fini G tel que :*

$$\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c},\infty)/K)/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$$

De plus, l'extension $K_0(\mathfrak{c},\infty)$ ne contient pas la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Démonstration. Soit $K(1)$ le corps de classes de Hilbert de K. Soit :

$$Z_0(\mathfrak{c}, \infty) = \varprojlim_{s} Z_0(\mathfrak{c}, s)$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, \infty)/K)$ s'insère d'après les lemmes 1.1.1 et 1.1.2 dans la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_K^\times}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, \infty)} \longrightarrow \frac{\widehat{\mathcal{O}}_K^\times}{Z_0(\mathfrak{c}, \infty)} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, \infty)/K(1)) \longrightarrow 1$$

En dehors de (p), le groupe $Z_0(\mathfrak{c}, \infty)_v$ est égal à $Z_0(\mathfrak{c}, 1)$ donc est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}_{K,v}^\times$. Soit $v|(p)$ et $x \in Z_0(\mathfrak{c}, \infty)$. Soit s un entier supérieur à 1. Dans la base propre (e_1, e_2) de $L(v)$ donnée par $\mathcal{X}$, l'image de x s'écrit :

$$q_v(x) = b(\mathfrak{c}, s)_v \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} b(\mathfrak{c}, s)_v^{-1} = \begin{pmatrix} a & b\varpi_v^{s+t} \\ c/\varpi_v^{s+t} & d \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathcal{O}_{F,v}^4$. Le coefficient supérieur droit de $q_v(x)$ est donc divisible par ϖ_v^s pour tout s, donc nul. Donc $q_v(x)$ stabilise $e_2 F_v$. Par définition d'une base propre, cela n'est possible que si x appartient à $F_v^\times$. Le groupe $Z_0(\mathfrak{c}, \infty)$ est donc inclus dans $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ et nous avons déjà observé que la réciproque était vraie. La suite exacte précédente devient donc :

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_K^\times}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, \infty)} \longrightarrow G_1 \times \prod_{v|p} \mathcal{O}_{K,v}^\times/\mathcal{O}_{F,v}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, \infty)/K(1)) \longrightarrow 1$$

où G_1 est un groupe fini. Le groupe $Z_0(\mathfrak{c}, \infty)$ contient $\mathcal{O}_{F,v}^\times$ donc $K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, \infty)$ contient $\mathcal{O}_F^\times$. Le groupe fini $\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_F^\times$ se surjecte donc sur :

$$\frac{\mathcal{O}_K^\times}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, \infty)}$$

Ce dernier groupe est donc fini. Donc $\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, \infty)/K)$ a une torsion finie et est de même $\mathbb{Z}_p$-rang que :

$$\prod_{v|p} \mathcal{O}_{K,v}^\times/\mathcal{O}_{F,v}^\times$$

Il est donc de $\mathbb{Z}_p$-rang d.

Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension contenue dans $K_0(\mathfrak{c}, \infty)$ et $Z \subset \widehat{K}^\times$ tel que :

$$\mathrm{Gal}(K_\infty/K) \xrightarrow{\sim} \widehat{K}^\times/K^\times Z$$

Soit $\sigma = \mathrm{rec}_K\, a \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Nous notons également σ la classe de σ dans le quotient

$$\mathrm{Gal}(K'_\infty/K) \xrightarrow{\sim} \widehat{K}^\times/K^\times \widehat{F}^\times Z$$

L'application de réciprocité

$$\mathrm{rec}_K : \widehat{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/F)$$

est compatible avec l'action de l'automorphisme non trivial τ de $\mathrm{Gal}(K/F)$ via la formule

$$\mathrm{rec}_K\, x^\tau = \tau(\mathrm{rec}_K\, x)\tau$$

L'idèle aa^τ appartient à $\widehat{F}^\times$ donc $\mathrm{rec}_K\, aa^\tau$ est d'action triviale sur K'_∞. Donc $\sigma\tau\sigma\tau$ est l'identité sur K'_∞ donc $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$. En particulier, si l'action de σ commute avec celle de τ sur K_∞, l'élément σ est un élément d'ordre 2 dans un groupe isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}_p$. Le nombre premier est impair donc σ est trivial. L'extension $K_0(\mathfrak{c}, s)$ ne contient donc pas la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K. □

Lemme 1.5.7. *Soit $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{O}_K$ le plus petit commun multiple des idéaux principaux $(u-1)$ avec $u \in (\mathcal{O}_K)^\times_{\mathrm{tors}}$ et $u \neq 1$.*

$$\mathcal{I}_0 = \bigvee \{(u-1) | u \in (\mathcal{O}_K)^\times_{\mathrm{tors}}, u \neq 1\}$$

Pour $\mathfrak{f}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ non-nul, soit

$$\mathcal{O}_\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_K$$

l'$\mathcal{O}_F$-ordre $\mathcal{O}_F + \mathfrak{f}\mathcal{O}_K$ de conducteur $\mathfrak{f}$. Soit $\mathfrak{f}$ tel que $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ soit inclus dans $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{f}^\times$ avec $\mathfrak{f} \nmid \mathcal{I}_0$. Alors :

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s+1)} = 0$$

Soit :

$$\mathcal{O}^\times_{F,1,s} = \{u \in \mathcal{O}_F^\times | \forall\ v | (p),\ u \equiv 1 \bmod \varpi_v^s\}$$

Alors :

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z(\mathfrak{c}, s)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_F^\times}{\mathcal{O}^\times_{F,1,s}}$$

Soit enfin $l \notin Ram(B)$ une place finie de F ne divisant pas $\mathfrak{c}$ et telle que $l\mathcal{O}_K \nmid \mathcal{I}_0$. Si $\mathfrak{c}$ diffère de $\mathcal{O}_F$:

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}l, s)} = 0$$

Sinon :

$$\frac{K^\times \cap Z_0(1, s)}{K^\times \cap Z_0(l, s)} = \frac{\mathcal{O}_K^\times}{\mathcal{O}_F^\times}$$

En particulier, ce quotient est fini et nous notons son cardinal $u(1)$.

Démonstration. En dehors de (p), les groupes $Z(\mathfrak{c}, s)$ et $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ sont égaux. Les quotients

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z(\mathfrak{c}, s)}$$

et

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s+1)}$$

ne dépendent donc que des conditions en $v|(p)$. Il est donc loisible pour la suite de la démonstration de supposer que $Z_0(\mathfrak{c}, s) = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}}^\times$. Soit $x \in K^\times \cap \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}}^\times \subset \mathcal{O}_K^\times$ et u égal à $x/\tau(x)$. Par construction de x :

$$x \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$$

Donc $\mathfrak{f}|(u-1)$ et $(u-1)|\mathcal{I}_0$. Par ailleurs, le carré du module de u est $u\tau(u)$ donc est égal à 1 donc u appartient à $(\mathcal{O}_K)^\times_{\text{tors}}$. Par définition de $\mathcal{I}_0$, u est donc égal à 1. Donc x appartient à $\mathcal{O}_F^\times$. L'inclusion réciproque est évidente. Ceci démontre déjà :

$$\frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s)}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s+1)} = 0$$

Soit maintenant $x \in K^\times \cap Z(\mathfrak{c}, s) \subset K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c}, s) = \mathcal{O}_F^\times$. Vu comme une application linéaire, un élément de $\mathcal{O}_F^\times$ ne fixe une droite d'un réseau L/ϖ_v^s que si $x \equiv 1 \bmod \varpi_v^s$. Donc x appartient à $\mathcal{O}_{F,1,s}^\times$ et l'inclusion réciproque est à nouveau évidente.

Soit maintenant l comme dans la proposition. Les groupes $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ et $Z_0(\mathfrak{c}l, s)$ ne diffèrent qu'en l. Si $\mathfrak{c} \neq 1$, nous avons vu plus haut que :

$$Z_0(\mathfrak{c}, s) \cap K^\times = Z_0(\mathfrak{c}l, s) \cap K^\times = \mathcal{O}_F^\times$$

Si $\mathfrak{c} = 1$, $Z_0(\mathfrak{c}, s) = \mathcal{O}_K^\times$ et $Z_0(\mathfrak{c}l, s) = \mathcal{O}_F^\times$. D'où le résultat. $\square$

A partir de maintenant, nous considérons uniquement les situations où $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}}^\times$ avec $\mathfrak{f} \nmid \mathcal{I}_0$.

Hypothèse 1.5.8. *L'idéal $\mathfrak{c}$ est tel que $Z_0(\mathfrak{c}, s)$ est inclus dans $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}}^\times$ avec $\mathfrak{f} \nmid \mathcal{I}_0$.*

Proposition 1.5.9. *Soit $\mathfrak{c}$ vérifiant l'hypothèse 1.5.8. Alors :*

$$\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, s+1)/K_0(\mathfrak{c}, s)) \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v$$

Soit G le groupe $\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, s+1)/K_0(\mathfrak{c}, s))$ et $T(p)^{dual}$ la correspondance de Hecke :

$$T(p)^{dual} = \prod_{v|p} [U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) g_v U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)] = \prod_{v|p} [U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)]$$

L'égalité de diviseurs de $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F \bar{F}$ est alors vraie :

$$T(p)^{dual} x(\mathfrak{c}, s) = \pi_1 \left(\sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot x(\mathfrak{c}, s+1) \right)$$

Démonstration. Le groupe $\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c},s+1)/K_0(\mathfrak{c},s))$ s'insère dans la suite exacte courte suivante :

$$1 \longrightarrow \frac{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c},s)}{K^\times \cap Z_0(\mathfrak{c},s+1)} \longrightarrow \frac{Z_0(\mathfrak{c},s)}{Z_0(\mathfrak{c},s+1)} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c},s+1)/K_0(\mathfrak{c},s)) \longrightarrow 1$$

D'après l'hypothèse 1.5.8 et le lemme 1.5.7, le premier terme de cette suite est nul. Donc :

$$\frac{Z_0(\mathfrak{c},s)}{Z_0(\mathfrak{c},s+1)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c},s+1)/K_0(\mathfrak{c},s))$$

Les deux groupes $Z_0(\mathfrak{c},s)$ et $Z_0(\mathfrak{c},s+1)$ ne diffèrent qu'en $v|(p)$. En ces places, il n'y a pas de perte de généralité à les envisager comme des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ stabilisant l'un une droite modulo ϖ_v^{s+t} et l'autre modulo ϖ_v^{s+t+1}. Le résultat en découle.

Pour v divisant (p), soit $k(v) = \mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v$. Calculons $T(p)^{dual}x(\mathfrak{c},s)$:

$$\begin{aligned}
T(p)^{dual}x(\mathfrak{c},s) &= \sum_{v|p}\sum_{a_v\in k(v)} [\mathcal{Z}, b(\mathfrak{c},s)\begin{pmatrix}\varpi_v & a_v\\ 0 & 1\end{pmatrix}]_s\\
&= \sum_{v|p}\sum_{a_v\in k(v)} [\mathcal{Z}, \begin{pmatrix}\varpi_v & a_v\varpi_v^{s+t}\\ 0 & 1\end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s)]_s\\
&= \sum_{v|p}\sum_{a_v\in k(v)} [\mathcal{Z}, \begin{pmatrix}1 & a_v\varpi_v^{s+t}\\ 0 & 1\end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s+1)]_s\\
&= \sum_{v|p}\sum_{a_v\in k(v)} \pi_1[\mathcal{Z}, \begin{pmatrix}1 & a_v\varpi_v^{s+t}\\ 0 & 1\end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s+1)]_{s+1}
\end{aligned}$$

D'après la première partie de la preuve :

$$\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c},s+1)/K_0(\mathfrak{c},s)) \xrightarrow{\sim} Z_0(\mathfrak{c},s)/Z_0(\mathfrak{c},s+1) \xrightarrow{\sim} \prod_{v|p} k(v)$$

Soit

$$M \subset \prod_{v|p} B_v^\times$$

un ensemble de représentants de $q(Z_0(\mathfrak{c},s)/Z_0(\mathfrak{c},s+1))$. L'orbite de $x(\mathfrak{c},s+1)$ sous l'action de G est alors un espace principal homogène sous l'action à droite de M donnée par :

$$m\cdot x(\mathfrak{c},s+1) = [\mathcal{Z}, m\cdot b(\mathfrak{c},s)]$$

En particulier, M est en bijection avec le produit des $k(v)$ et :

$$\sum_{\sigma\in G}\pi_1(x(\mathfrak{c},s+1)^\sigma) = \sum_{m\in M}\pi_1[\mathcal{Z}, m\cdot b(\mathfrak{c},s+1)]_{s+1}$$

Pour terminer la preuve de l'égalité

$$\sum_{\sigma\in G}\pi_1(x(\mathfrak{c},s+1)^{\sigma}) = T(p)^{dual}x(\mathfrak{c},s) \tag{1.5.1.1}$$

il suffit donc de démontrer que

$$M = \left\{\begin{pmatrix}1 & a_v\varpi_v^{s+t}\\ 0 & 1\end{pmatrix} |\forall\ v|(p), \forall\ a_v \in k(v)\right\}$$

convient. Cela est assuré par le fait que la classe de

$$\begin{pmatrix}1 & a_v\varpi_v^{s+t}\\ 0 & 1\end{pmatrix} b(\mathfrak{c},s+1) \in B^{\times}\backslash\widehat{B}^{\times}/U_{1,0}(\mathcal{N},P^{s+1})$$

ne dépend que de la classe de a_v dans $k(v)$. □

Lemme 1.5.10. *Soit $\mathfrak{c}$ vérifiant l'hypothèse 1.5.8. Soit l une place finie de F inerte dans K n'appartenant ni à Ram(B) ni à $\mathcal{N}\mathfrak{c}(p)$ et telle que la donnée $D_{1,0}$ soit compatible à q en l. Soit λ l'unique place de K au-dessus de l, $k(l)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{F,l}$ et $k(\lambda)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{K,\lambda}$. Alors :*

$$\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}l,s)/K_0(\mathfrak{c},s)) \xrightarrow{\sim} k(\lambda)^{\times}/k(l)^{\times}$$

En particulier, $G_l = \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s))$ est un groupe cyclique de cardinal $N_{F/\mathbb{Q}}l+1$.

Soit $T(l)$ la correspondance de Hecke associée à l. L'égalité des diviseurs de $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F \bar{F}$ suivante est alors vraie :

$$T(l)x(\mathfrak{c},s) = \sum_{\sigma\in G_l}\sigma\cdot x(\mathfrak{c}l,s)$$

Démonstration. Le groupe $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s))$ s'insère dans la suite exacte courte suivante :

$$1 \longrightarrow \frac{K^{\times}\cap Z(\mathfrak{c},s)}{K^{\times}\cap Z(\mathfrak{c}l,s)} \longrightarrow \frac{Z(\mathfrak{c},s)}{Z(\mathfrak{c}l,s)} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s)) \longrightarrow 1$$

Les groupes $Z(\mathfrak{c}l,s)$ et $Z(\mathfrak{c},s)$ ne diffèrent par définition qu'en l. La place l ne divise pas (p) donc

$$Z_0(\mathfrak{c}l,s)_l = Z(\mathfrak{c},s)_l$$

et

$$Z_0(\mathfrak{c},s)_l = Z(\mathfrak{c},s)_l$$

par définition de Z_0. D'après l'hypothèse 1.5.8 et le lemme 1.5.7 :

$$\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}l,s)/K_0(\mathfrak{c},s)) \xrightarrow{\sim} \frac{Z(\mathfrak{c},s)_l}{Z(\mathfrak{c}l,s)_l} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s))$$

Reste à démontrer que :

$$\frac{Z(\mathfrak{c},s)_l}{Z(\mathfrak{c}l,s)_l} \xrightarrow{\sim} k(\lambda)^\times/k(l)^\times$$

La place l ne divise pas $\mathcal{N}\mathfrak{c}(p)$ donc $U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l$ est un sous-groupe compact maximal et $b(\mathfrak{c},s)_l = 1$. Donc :

$$b(\mathfrak{c},s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c},s)_l^{-1} = U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l$$

Le sous-groupe $q_l^{-1}(b(\mathfrak{c},s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c},s)_l^{-1})$ est égal à $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ car la donnée $D_{1,0}$ est compatible à q en l. Le sous-groupe $q_l^{-1}(b(\mathfrak{c}l,s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c}l,s)_l^{-1})$ est un sous-groupe compact de $K_\lambda^\times$ donc est contenu dans $\mathcal{O}_{K,\lambda}$. Donc :

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{c}l,s)_l &= q_l^{-1}(b(\mathfrak{c}l,s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c}l,s)_l^{-1}) \\ &= q_l^{-1}(U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l) \cap q_l^{-1}(b(\mathfrak{c}l,s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c}l,s)_l^{-1}) \\ &= q_l^{-1}(U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l) \cap b(\mathfrak{c}l,s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c}l,s)_l^{-1}) \end{aligned}$$

Par définition de $b(\mathfrak{c}l,s)$, la valuation ϖ_l-adique de la norme réduite de $b(\mathfrak{c}l,s)_l$ est 1. Le groupe $U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l) \cap b(\mathfrak{c}l,s)_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l b(\mathfrak{c}l,s)_l^{-1}$ est donc le groupe des unités d'un ordre d'Eichler de niveau ϖ_l. Le quotient

$$\frac{Z(\mathfrak{c},s)}{Z(\mathfrak{c}l,s)}$$

est donc égal au quotient de $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ par un ordre d'Eichler de niveau ϖ_λ, donc à $k(\lambda)^\times/k(l)^\times$.

Il n'y a pas de perte de généralité à considérer que la correspondance $T(l)$ agit via le quotient :

$$[U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l g_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l] = [U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_l \end{pmatrix} U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l]$$

Ce quotient est en bijection avec

$$U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l/(U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l \cap g_l U_{1,0}(\mathcal{N},P^s)_l g_l^{-1})$$

par l'application $b \mapsto bg$. Le même raisonnement que plus haut montre donc qu'il est en bijection avec $k(\lambda)^\times/k(l)^\times$. □

Lemme 1.5.11. *Soit $\mathfrak{c}$ vérifiant l'hypothèse 1.5.8. Soit l une place finie de F inerte dans K, n'appartenant pas à S_B, ne divisant pas $\mathcal{N}(p)\mathfrak{c}$ et telle que $D_{1,0}$ soit compatible à q en l. Soit λ l'unique place de K au-dessus de l et λ' une place de $K(\mathfrak{c},s)$ au-dessus de l. Alors λ décompose totalement dans $K(\mathfrak{c},s)/K$ et λ' est totalement modérément ramifiée dans $K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c},s)$.*

Démonstration. Les hypothèses sur l impliquent que $U_{1,0}(\mathcal{N}, P^s)_l$ est un groupe compact ouvert maximal, que $b(\mathfrak{c}, s)_l$ est l'identité et que $Z(\mathfrak{c}, s)_l$ est $\mathcal{O}_{K,l}^\times$. Donc λ est non-ramifiée dans $K(\mathfrak{c}, s)$. Donc la norme de $\mathcal{O}_{K(\mathfrak{c},s),\lambda'}^\times$ dans $\mathcal{O}_{K,l}$ est une surjection. Le groupe d'inertie en λ' est l'image de $\mathcal{O}_{K(\mathfrak{c},s),\lambda'}^\times$ dans $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))$. Le groupe $\mathcal{O}_{K,l}^\times$ se surjecte sur le quotient

$$\frac{(\mathcal{O}_K/l\mathcal{O}_K)^\times}{(\mathcal{O}_F/l\mathcal{O}_F)^\times}$$

donc la composée des applications suivantes est une surjection :

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{c},s),\lambda'}^\times \xrightarrow{N_{\lambda/l}} \mathcal{O}_{K,l} \longrightarrow \frac{(\mathcal{O}_K/l\mathcal{O}_K)^\times}{(\mathcal{O}_F/l\mathcal{O}_F)^\times}$$

L'ensemble d'arrivée de cette application est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))$ d'après le lemme 1.5.10 donc la place λ' est totalement ramifiée. La ramification est modérée car le cardinal du groupe d'inertie est $N_{F/\mathbb{Q}}l + 1$.

Si l est inerte dans K, le groupe de décomposition de λ dans $K(\mathfrak{c}, s)$ est l'image de $K_\lambda^\times$ dans $\widehat{K}^\times/K^\times Z(\mathfrak{c}, s)$. La place λ est non-ramifiée donc l'application naturelle

$$K_\lambda^\times \longrightarrow \widehat{K}^\times/K^\times Z(\mathfrak{c}, s)$$

se factorise à travers $K_\lambda^\times/K^\times\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$. Ce dernier quotient est nul donc λ est totalement décomposée dans $K(\mathfrak{c}, s)$. □

Proposition 1.5.12. *Soit $s > 0$. Nous rappelons que nous supposons de façon permanente que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p. Nous continuons de noter Γ le groupe de Galois de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F et $\mathcal{O}_{F,1,s}^\times$ les unités de $\mathcal{O}_F^\times$ congrues à 1 modulo (p^s). Nous supposons que l'hypothèse 1.5.8 est vérifiée. Alors :*

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_F^\times}{\mathcal{O}_{F,1,s}^\times} \longrightarrow \prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s)/K_0(\mathfrak{c}, s)) \longrightarrow 1$$

De plus, il existe une groupe abélien fini G_{tors} tel que :

$$\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, \infty)/K_0(\mathfrak{c}, \infty)) \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{tors}} \times \Gamma$$

Démonstration. La suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_F^\times}{\mathcal{O}_{F,1,s}^\times} \longrightarrow \prod_{v|p}(\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v^s)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, s)/K_0(\mathfrak{c}, s)) \longrightarrow 1$$

est l'application des lemmes 1.1.2, 1.5.5 et 1.5.7 à notre situation. Lorsque s tend vers l'infini, la suite courte précédente devient :

$$1 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}_F^\times \longrightarrow \prod_{v|p}\mathcal{O}_{F,v}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}, \infty)/K_0(\mathfrak{c}, \infty)) \longrightarrow 1$$

Le corps F vérifie la conjecture de Leopoldt en p donc la clôture p-adique de $\mathcal{O}_F^\times$ est de $\mathbb{Z}_p$-rang $d-1$ et donc la partie pro-p maximale de $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},\infty)/K_0(\mathfrak{c},s\infty))$ est de $\mathbb{Z}_p$-rang 1.

L'extension $K(\mathfrak{c},\infty)/K_0(\mathfrak{c},\infty)$ contient donc une $\mathbb{Z}_p$-extension et $K(\mathfrak{c},\infty)/K$ contient $d+1$ $\mathbb{Z}_p$-extensions d'après le lemme 1.5.6. Le corps F vérifie la conjecture de Leopoldt en p et K est une extension quadratique totalement imaginaire de F donc K vérifie également la conjecture de Leopoldt en p. Le nombre de $\mathbb{Z}_p$-extensions de K est donc exactement $d+1$. Le corps $K(\mathfrak{c},\infty)$ contient donc la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. D'après le lemme 1.5.6, ce n'est pas le cas de $K_0(\mathfrak{c},\infty)$ et la $\mathbb{Z}_p$-extension contenue dans $K(\mathfrak{c},\infty)/K_0(\mathfrak{c},\infty)$ est donc de groupe de Galois Γ. □

Nous déduisons de cette proposition l'action de G_∞ et de $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ sur $x(\mathfrak{c},s)\in\mathcal{X}$.

Corollaire 1.5.13. *Nous conservons les hypothèses de la proposition 1.5.12. Soit s strictement supérieur à 0 et $x(\mathfrak{c},s)\in\mathcal{X}$. Le point CM $x(\mathfrak{c},s)$ est un point de $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)^{an}$ donc G_∞ agit sur lui par l'action diamant. Soit σ appartenant à $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et fixant $K_0(\mathfrak{c},s)$.*

Il existe alors un a appartenant à

$$\prod_{v|p}\mathcal{O}_{F,v}^\times$$

tel que :

$$\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s)=(\mathrm{rec}_K\,a)\cdot x(\mathfrak{c},s)=<a>\cdot x(\mathfrak{c},s)$$

Ou encore :

$$\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s)=<\chi_\infty^{1/2}(\sigma)>\cdot x(\mathfrak{c},s)$$

Démonstration. Soit σ appartenant à $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K_0(\mathfrak{c},s))$. L'action de σ sur $x(\mathfrak{c},s)$ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s))$. D'après la proposition 1.5.12, il existe donc $a\in(\mathcal{O}_F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^\times$ tel que :

$$\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s)=(\mathrm{rec}_K\,a)\cdot x(\mathfrak{c},s)$$

La loi de réciprocité de Shimura montre alors que :

$$\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s)=[\mathcal{Z},\widehat{q}(a)b(\mathfrak{c},s)]=[\mathcal{Z},b(\mathfrak{c},s)\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}]=<a>\cdot x(\mathfrak{c},s)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\chi_\infty(\sigma)&=\chi_\infty(\sigma_{|F^{ab}})\\&=\chi_\infty(\mathrm{rec}_F\,a^2)\\&=a^2\end{aligned}$$

Donc $\chi_\infty(\sigma)$ est un carré. □

1.5.2 Application d'Abel-Jacobi et classes dans $H^1(K, \mathcal{T})$

Comme dans la sous-section 1.4.5, soit R un facteur local intègre de Gorenstein de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ et $\mathcal{T}$ la représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ à coefficients dans R du théorème 1, page 81. Nous rappelons que nous supposons toujours fixé un choix de caractère χ tel que χ^2 soit égal à ω_{tame}. La famille de points $\mathcal{X}$ permet de construire une classe de cohomologie $z(\mathfrak{c}) \in H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$ par le procédé suivant.

Soit E une extension finie de F. Soit $CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E)_0$ le noyau de l'application classe de cycles :

$$cl_0 : CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E) \longrightarrow H^0(E, H^2_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})(1))$$

La suite courte suivante est alors exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \longrightarrow CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \\ \longrightarrow H^0(E, H^2_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})(1)) \end{aligned} \tag{1.5.2.1}$$

La dualité de Poincaré met en dualité :

$$H^2_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})(1)$$

et

$$H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$$

Le groupe $H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$ est isomorphe à un produit de copies de $\mathcal{O}$ indexé par les composantes connexes de $M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E$. Il en est donc de même pour :

$$H^0(E, H^2_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})(1))$$

L'opérateur de Hecke $T(p)^{dual}$ agit sur $H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$ par multiplication par son degré, donc par multiplication par :

$$C = \prod_{v|p} |\mathcal{O}_{F,v}/\varpi_v| = \prod_{v|p} N_{F/\mathbb{Q}} \varpi_v$$

Par définition de e^{dual}, l'opérateur $T(p)^{dual}$ agit de manière inversible sur

$$e^{dual} H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$$

donc la partie ordinaire duale

$$e^{dual} H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$$

de $H^0_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_E \bar{E}, \mathcal{O})$ est nulle. La suite courte (1.5.2.1) devient donc :

$$e^{dual} CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} e^{dual} CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s) \otimes_F E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$$

Nous identifions dans ce qui suit ces deux groupes et considérons en particulier l'image

$$x(\mathfrak{c}, s)^{dual} = e^{dual} x(\mathfrak{c}, s)$$

par e^{dual} de la classe de $x(\mathfrak{c},s)$ dans

$$e^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$$

indifféremment comme élément de

$$e^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$$

ou de

$$e^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$$

Le module $e^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$ est muni d'une action de l'algèbre semi-locale $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$:

$$\mathfrak{h}_\infty^{dual}=\prod\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{dual}$$

Soit e_R le projecteur

$$e_R : CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}\longrightarrow CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$$

associé à R et

$$e_R^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$$

l'image de $e^{dual}CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c},s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$ par e_R. Soit $x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}$ l'image de $x(\mathfrak{c},s)^{dual}$ par e_R. L'image de $x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}$ par Φ appartient alors à :

$$H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1))$$

Soit σ fixant $K(\mathfrak{c},s)$. Alors $<\chi_\infty^{1/2}(\sigma)>$ agit trivialement sur $x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}$ donc $\chi^{-1}(\sigma)$ et $\chi_{\Gamma_s}^{-1/2}(\sigma)$ sont égaux à 1. Donc :

$$H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1))\otimes_R\chi^{-1}\chi_{\Gamma_s}^{-1/2}\xrightarrow{\sim}H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1)\otimes_R\chi^{-1}\chi_{\Gamma_s}^{-1/2})$$

Nous voyons donc que :

$$\Phi(x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}\otimes 1)\in H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1)\otimes_R\chi^{-1}\chi_{\Gamma_s}^{-1/2})$$

Soit $\mathcal{T}_s$ la représentation $\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1)\otimes_R\chi^{-1}\chi_{\Gamma_s}^{-1/2}$. Soit $\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ fixant $K_0(\mathfrak{c},s)$. D'après le corollaire 1.5.13 :

$$\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}=\chi(\sigma)\chi_{\Gamma_s}^{1/2}(\sigma)\cdot x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}$$

Donc :

$$\Phi(x(\mathfrak{c},s)_R^{dual}\otimes 1)\in H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{W}_s^{dual}(R)(1)\otimes_R\chi^{-1}\chi_{\Gamma_s}^{-1/2})^{\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s))}$$

La suite d'inflation-restriction relative au groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K_0(\mathfrak{c},s))$ et au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(\mathfrak{c},s))$ s'écrit :

$$\begin{aligned}0&\longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s)),\mathcal{T}_s^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(\mathfrak{c},s))})\longrightarrow H^1(K_0(\mathfrak{c},s),\mathcal{T}_s)\\&\longrightarrow H^1(K(\mathfrak{c},s),\mathcal{T}_s)^{\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s))}\longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s)),\mathcal{T}_s^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(\mathfrak{c},s))})\end{aligned}$$

La représentation $\mathcal{T}_s(R)$ est pure de poids -1 en chaque place ne divisant pas $\mathcal{N}(p)$ et où χ n'est pas ramifié donc $\mathcal{T}_s$ n'a pas d'élément invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(\mathfrak{c}, s))$. Donc :

$$H^1(K_0(\mathfrak{c}, s), \mathcal{T}_s) \longrightarrow H^1(K(\mathfrak{c}, s), \mathcal{T}_s)^{\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s))}$$

Proposition 1.5.14. *Soit $K_0(\mathfrak{c})$ le corps $K_0(\mathfrak{c}, 1)$. Soit $\mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}s/\mathfrak{c}}$ la corestriction de $K_0(\mathfrak{c}, s)$ à $K_0(\mathfrak{c})$. Soit :*

$$y(\mathfrak{c}, s) = \mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}s/\mathfrak{c}} \Phi(x(\mathfrak{c}, s)_R^{dual} \otimes 1) \in H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_s)$$

Alors :

$$\pi_{1*} y(\mathfrak{c}, s + 1) = T(p)_*^{dual} y(\mathfrak{c}, s) \tag{1.5.2.2}$$

En particulier :

$$m(\mathfrak{c}) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \pi_{1*}}} (T(p)^{dual})^{-s} y(\mathfrak{c}, s) \in H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$$

Démonstration. Soit G_s le groupe $\mathrm{Gal}(K_0(\mathfrak{c}, s+1)/K_0(\mathfrak{c}, s))$. D'après la proposition 1.5.9 :

$$T(p)^{dual} x(\mathfrak{c}, s)_R^{dual} = \pi_1 \left(\sum_{\sigma \in G_s} \sigma \cdot x(\mathfrak{c}, s + 1)_R^{dual} \right)$$

L'application d'Abel-Jacobi p-adique est équivariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et sous celle de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ donc :

$$\begin{aligned} T(p)_*^{dual} y(\mathfrak{c}, s) &= \pi_{1*} \mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}s/\mathfrak{c}} \mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}(s+1)/\mathfrak{c}s} (\Phi(x(\mathfrak{c}, s + 1)_R^{dual} \otimes 1)) \\ &= \pi_{1*} y(\mathfrak{c}, s + 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\pi_{1*} (T^{dual}(p)_*)^{-s-1} y(\mathfrak{c}, s + 1) = (T^{dual}(p)_*)^{-s} y(\mathfrak{c}, s)$$

L'élément $m(\mathfrak{c}) = \lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ \pi_{1*}}} (T(p)^{dual})^{-s} y(\mathfrak{c}, s)$ de $H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$ est donc bien défini. □

Définition 1.5.15. *Soit SK_1 l'ensemble des places finies l de F vérifiant les conditions suivantes :*

1. *l n'appartient pas à $Ram(B)$.*
2. *l ne divise pas $\mathcal{N}(p) d_{K/F}$.*
3. *l est inerte dans K/F.*
4. *La donnée $D_{1,0}$ est compatible à q en l.*
5. *$l\mathcal{O}_K$ ne divise pas $\mathcal{I}_0$.*
6. *l n'est pas une place de ramification de χ.*
7. *$\chi(\mathrm{Fr}(l)) = 1$.*

Nous appelons premier de Kolyvagin un élément de SK_1. Pour r un entier positif, soit SK_r l'ensemble des produits de r éléments distincts de SK_1. Soit SK l'union des SK_r pour tout $r \in \mathbb{N}$. En particulier, $1 \in SK$.

Nous rappelons que la donnée $D_{1,0}$ est compatible à q en l si et seulement si :

$$q_v^{-1}(R(v)^\times) = \mathcal{O}_{K,v}^\times$$

Nous rappelons que χ est une racine carrée fixée de caractère $\omega_{f,tame}$. Les conditions définissant un premier de Kolyvagin excluent seulement un nombre fini de places de F, sauf éventuellement la dernière. Par le théorème de densité de Chebotarev, l'ensemble des places de F vérifiant la dernière condition est de densité positive et il en est donc de même pour l'ensemble des premiers de Kolyvagin.

Soit r et t deux entiers positifs et

$$\mathfrak{c} = l_1 \cdots l_r \in SK_r$$

Soit $K(\mathfrak{c}) \subset K_0(\mathfrak{c})$ la sous-extension définie par

$$K(\mathfrak{c}) = \prod_{i=1}^{r} K_0(l_i)$$

si $r > 0$. Si r est égal à 0, alors $K_0(\mathfrak{c})$ est une extension finie du corps de classes de Hilbert de K. Dans ce cas, nous conservons la notation $K(1) = K_0(1)$. Soit $K(\mathfrak{c}p^t) \subset K_0(\mathfrak{c}p^t)$ la sous-extension définie par :

$$K(\mathfrak{c}p^t) = K(\mathfrak{c})K_0(p^t)$$

Nous rappelons que $u(1)$ est le cardinal de $\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_F^\times$.

Lemme 1.5.16. *Soit $G_\mathfrak{c}$ le groupe $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c})/K(1))$ et $u(\mathfrak{c}) = u(1)$ si $r = 0$ et 1 sinon. Alors, le groupe G_{l_i} est cyclique d'ordre $(N_{F/\mathbb{Q}}l_i + 1)/u(1)$. Le groupe $G_\mathfrak{c}$ est isomorphe au produit des groupes G_{l_i}*

$$G_\mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} G_{l_i}$$

et $[K_0(\mathfrak{c}) : K(\mathfrak{c})] = u(\mathfrak{c})u(1)^{r-1}$.

Démonstration. Il s'agit de la proposition-définition 4.10 et du lemme 4.11 de [Nek04]. □

Définition 1.5.17. *Soit R un facteur local de $\mathfrak{h}_\infty^{dual}$ vérifiant les hypothèses du théorème 1 page 81 et $\lambda_\mathfrak{m}$ le morphisme qui lui est associé. Soit $\mathcal{T}$ le $R[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module libre de rang 2 du théorème 1.*

$$\mathcal{T} = \mathcal{W}_\infty^{dual}(R)(1) \otimes \chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}$$

Pour r et t des entiers positifs et $\mathfrak{c} \in SK_r$, soit $u(\mathfrak{c}) = |\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_F^\times|$ ou 1 selon que $r = 0$ ou non. Nous définissons :

$$z(\mathfrak{c}) = \frac{u(1)}{u(\mathfrak{c})} \operatorname{Cor}_{K_0(\mathfrak{c})/K(\mathfrak{c})} \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)_*^{dual})^{-s} y(\mathfrak{c}, s) \in H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$$

Et :

$$z(\mathfrak{c}p^t) = \frac{u(1)}{u(\mathfrak{c})} \operatorname{Cor}_{K_0(\mathfrak{c}p^t)/K(\mathfrak{c}p^t)} \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)_*^{dual})^{-s} y(\mathfrak{c}p^t, s) \in H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T})$$

Nous avons ainsi construit des classes de cohomologie à coefficients dans $\mathcal{T}$. Nous remarquons que tout ce que nous avons fait garde un sens dans un cadre purement géométrique. Soit en effet $\mathfrak{c} \in SK$ et s un entier plus grand que 1. Soit :

$$\xi(\mathfrak{c}, s) = \frac{u(1)}{u(\mathfrak{c})} \operatorname{Tr}_{K_0(\mathfrak{c})/K(\mathfrak{c})} \operatorname{Tr}_{\mathfrak{c}s/\mathfrak{c}} T(p)^{-s} \operatorname{Tr}_{K(\mathfrak{c},s)/K_0(\mathfrak{c},s)}(x(\mathfrak{c}, s)_R^{dual} \otimes 1)$$

Le point $\xi(\mathfrak{c}, s)$ est bien défini car la correspondance $T(p)$ est inversible sur

$$e^{dual} CH^1(M_{1,0}(\mathcal{N}, P^s))$$

Les points $\xi(\mathfrak{c}, s)$ forment également un système projectif.

Proposition 1.5.18. *Nous conservons les hypothèses et les notations de la définition 1.5.17. Soit $\mathfrak{c}l \in SK$ et t un entier positif. Alors :*

$$\operatorname{Cor}_{\mathfrak{c}p^t l/\mathfrak{c}p^t} z(\mathfrak{c}p^t l) = T(l)_* z(\mathfrak{c}p^t)$$

Et :

$$\operatorname{Cor}_{\mathfrak{c}p^{t+1}/\mathfrak{c}p^t} z(\mathfrak{c}p^{t+1}) = T(p)_* z(\mathfrak{c}p^t)$$

Démonstration. Nous remarquons tout d'abord que la première égalité admet une formulation purement locale en l, si bien que p n'y joue aucun rôle. Nous pouvons donc supposer que $t = 0$. Soit l comme dans les hypothèses et $G_l = \operatorname{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))$. D'après le lemme 1.5.16, le groupe G_l est cyclique d'ordre $(N_{F/Q} l + 1)/u(1)$. Commençons par comparer les quotients $u(1)/u(\mathfrak{c})$ et $u(1)/u(\mathfrak{c}l)$. L'idéal $\mathfrak{c}l$ diffère de 1 donc $u(\mathfrak{c}l) = 1$. Par conséquent :

$$u(\mathfrak{c}) = \frac{u(\mathfrak{c})}{u(1)} \frac{u(1)}{u(\mathfrak{c}l)}$$

Pour montrer que

$$T(l)_* z(\mathfrak{c}) = \operatorname{Cor}_{\mathfrak{c}l/\mathfrak{c}} z(\mathfrak{c}l)$$

il suffit donc de montrer que :

$$T(l)_* m(\mathfrak{c}) = u(\mathfrak{c}) m(\mathfrak{c}l)$$

D'après le lemme 1.5.10 et la définition de $u(\mathfrak{c})$:

$$T(l)x(\mathfrak{c},s) = u(\mathfrak{c})\sum_{\sigma\in G_l}\sigma\cdot x(\mathfrak{c}l,s)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
T(l)_*(\mathfrak{c}) &= \varprojlim_{\pi_{1*}} T(l)_*(T(p)^{dual})_*^{-s}y(\mathfrak{c},s)\\
&= \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)^{dual})_*^{-s}T(l)_*y(\mathfrak{c},s)\\
&= \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)^{dual})_*^{-s}u(\mathfrak{c})y(\mathfrak{c}l,s)\\
&= u(\mathfrak{c})m(\mathfrak{c}l)
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait.

Par définition des points $x(\mathfrak{c},s)$, $x(\mathfrak{c}p^{t+1},s) = \pi_1(x(\mathfrak{c}p^t,s+1))$. Les mêmes calculs que dans la preuve de la proposition 1.5.14 montrent que :

$$\begin{aligned}
(T(p)^{dual})_*m(\mathfrak{c}p^t) &= \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)^{dual})_*(T(p)^{dual})_*^{-s}y(\mathfrak{c}p^t,s)\\
&= \varprojlim_{\pi_{1*}} (T(p)^{dual})_*^{-s}(T(p)^{dual})_*y(\mathfrak{c}p^t,s)\\
&= \mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}p^{t+1},\mathfrak{c}p^t}\, m(\mathfrak{c}p^{t+1})
\end{aligned}$$

Et nous terminons comme plus haut. □

Proposition 1.5.19. *Soit $\mathfrak{c}l \in SK_{r+1}$. Soit v une place de $K(\mathfrak{c})$ au-dessus de l et w l'unique place de $K(\mathfrak{c}l)$ au-dessus de v. Soit $\mathrm{Fr}(l) \in \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c})/F)$ la classe de conjugaison du morphisme de Frobenius de l. Alors :*

$$\mathrm{loc}_w\, z(\mathfrak{c}l) = u(1)\,\mathrm{Fr}(l)\,\mathrm{loc}_w(z(\mathfrak{c})) \in H^1(K(\mathfrak{c}l)_w,\mathcal{T})$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_0(\mathfrak{c})$ et $\mathcal{O}_0(\mathfrak{c}l)$ les anneaux des entiers de $K_0(\mathfrak{c})$ et $K_0(\mathfrak{c}l)$. Soit $\mathcal{O}_0(\mathfrak{c})_v$ et $\mathcal{O}_0(\mathfrak{c}l)_w$ les complétions de ces deux anneaux en v et w et $k(v)$ et $k(w)$ leurs corps résiduels. La courbe $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\times_F K(\mathfrak{c}l,s)$ admet un modèle propre et lisse sur $\mathcal{O}_0(\mathfrak{c}l,s)_w$. Soit

$$M^{spe} = (M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_F K(\mathfrak{c}l,s))\times_{\mathcal{O}_0(\mathfrak{c}l,s)_w} k(w)$$

sa fibre spéciale. La courbe $M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)$ a bonne réduction en l donc l'image de la composée de Φ et de la localisation en w est incluse dans :

$$H^1_{nr}(K(\mathfrak{c}l,s)_w, H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_{K(\mathfrak{c}l,s)}\bar{K},\mathcal{O}))$$

Le théorème de changement de base propre et lisse et la définition de l'extension maximale non-ramifiée montrent que :

$$\begin{array}{c} H^1_{nr}(K(\mathfrak{c}l,s)_w, H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_{K(\mathfrak{c}l,s)}\bar{K},\mathcal{O})(1)) \\ \big\downarrow\wr \\ H^1(k(w), H^1_{et}(M_{1,0}(\mathcal{N},P^s)\otimes_{K(\mathfrak{c}l,s)}\bar{K},\mathcal{O})(1)) \\ \big\downarrow\wr \\ H^1(k(w), H^1_{et}(M^{spe}\times_{k(w)}\overline{k(w)},\mathcal{O})(1)) \end{array}$$

Il suffit donc de démontrer le résultat annoncé pour M^{spe}.

Soit $G = \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l,s)/K(\mathfrak{c}l))$. Alors :

$$T(l)x(\mathfrak{c},s) = u(\mathfrak{c})\sum_{\sigma\in G}\sigma\cdot x(\mathfrak{c}l,s)$$

La relation d'Eichler-Shimura énonce l'égalité suivante entre correspondances sur M^{spe} :

$$T(l) = \mathrm{Fr}(l) + <l> N_{F/\mathbb{Q}}l\,\mathrm{Fr}(l)^{-1}$$

Notons $x(\mathfrak{c},s)^{spe}$ la réduction de $x(\mathfrak{c},s)$ dans M^{spe}. L'égalité suivante est donc vraie dans $CH^1(M^{spe})$:

$$(\mathrm{Fr}(l) + <l> N_{F/\mathbb{Q}}l\,\mathrm{Fr}(l)^{-1})x(\mathfrak{c},s) = u(\mathfrak{c})\sum_{\sigma\in G}x(\mathfrak{c}l,s)^{spe}$$

La place l est inerte dans K, donc la réduction d'un point CM en l est un point supersingulier d'après [CV05] lemme 3.1. Ce même article section 3.2.3 proposition 3.9 ou bien la proposition de la section 10.3 de [Car86] décrivent le stabilisateur d'un point supersingulier sous l'action de $\mathrm{GL}_2(F_l)\times W(F_l^{ab}/F_l)$. D'après la relation de congruence de [Car86], l'élément suivant de $\mathrm{GL}_2(F_l)\times W(F_l^{ab}/F_l)$ stabilise un point supersingulier, et donc en particulier $x(\mathfrak{c},s)^{spe}$.

$$\left(\begin{pmatrix} l^{-2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \mathrm{Fr}(l)^2\right)$$

D'après [CV05] proposition 3.9, l'action de $\mathrm{GL}_2(F_l)$ sur l'ensemble des points supersinguliers factorise à travers la norme réduite donc :

$$<l> x(\mathfrak{c},s)^{spe} = \mathrm{Fr}(l)^2 x(\mathfrak{c},s)^{spe}$$

Soit encore :

$$(N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)\,\mathrm{Fr}(l)x(\mathfrak{c},s)^{spe} = u(\mathfrak{c})\sum_{\sigma\in G}\sigma\cdot x(\mathfrak{c}l,s)^{spe}$$

En tant qu'éléments de $CH^1(M^{spe})$, nous avons donc :

$$x(\mathfrak{c}l,s)^{spe} = \mathrm{Fr}(l)x(\mathfrak{c},s)^{spe}$$

L'application d'Abel-Jacobi est compatible à l'action galoisienne donc :

$$\Phi(x(\mathfrak{c}l,s)^{spe}) = \mathrm{Fr}(l)\Phi(x(\mathfrak{c},s)^{spe})$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. La localisation est compatible avec toutes les opérations de la construction de $m(\mathfrak{c})$ à partir de $x(\mathfrak{c},s)$ et de $m(\mathfrak{c}l)$ à partir de $m(\mathfrak{c}l,s)$. Nous rappelons par ailleurs que $u(\mathfrak{c}l)=1$. D'après le lemme 1.5.16, le degré de $K_0(\mathfrak{c}l)$ sur $K(\mathfrak{c}l)$ est égal à $u(1)^r$ et celui de $K_0(\mathfrak{c})$ sur $K(\mathfrak{c})$ est égal à $u(\mathfrak{c})u(1)^{r-1}$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{loc}_w\, z(\mathfrak{c}l) &= \mathrm{loc}_w\left(\frac{u(1)}{u(\mathfrak{c}l)}\,\mathrm{Cor}_{K_0(\mathfrak{c}l)/K(\mathfrak{c}l)}\, m(\mathfrak{c}l)\right)\\
&= u(1)^{r+1}\,\mathrm{Fr}(l)\,\mathrm{loc}_w\left(\frac{1}{u(1)^r}z(\mathfrak{c})\right)\\
&= u(1)\,\mathrm{Fr}(l)\,\mathrm{loc}_w\, z(\mathfrak{c})
\end{aligned}$$

□

Pour t un entier positif et $\mathfrak{c}\in SK$, soit $K(\mathfrak{c}p^t)$ l'extension composée de $K(\mathfrak{c})$ et de $K_0(p^t)$. L'union pour tout t des extensions $K(\mathfrak{c}p^t)$ contient $K_0(1,\infty)$ donc contient la $\mathbb{Z}_p^d$-extension anticyclotomique de K par le lemme 1.5.6.

Définition 1.5.20. *Soit D_∞ la $\mathbb{Z}_p^d$-extension de K contenue dans $K(\mathfrak{c}p^\infty)$ et Γ_d le groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(D_\infty/K)$.

$$\Gamma_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$$

Soit D_s la sous-extension fixée par $\Gamma_d^{p^s}$ et pour $\mathfrak{c}\in SK$, soit $D_s(\mathfrak{c})$ l'extension composée de D_s et $K(\mathfrak{c})$. Soit t tel que $K(\mathfrak{c}p^t)$ contienne $D_s(\mathfrak{c})$. Soit :

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_s = \mathrm{Cor}_{K(\mathfrak{c}p^t)/D_s(\mathfrak{c})}(T(p)_*^{dual})^{-t}z(\mathfrak{c}p^t)\in H^1(D_s(\mathfrak{c}),\mathcal{T})$$

La définition de $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_s$ ne dépend pas du choix de t d'après la proposition 1.5.18. Soit :

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{c}) = \varprojlim_s \mathfrak{z}(\mathfrak{c})_s \in H^1(D_\infty(\mathfrak{c}),\mathcal{T})$$

La limite est prise pour la corestriction. D'après la proposition 1.5.18, l'élément $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est bien défini. Enfin, soit $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}=\mathcal{T}\otimes_R R[[\Gamma_d]]$ muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *sur les deux facteurs.*

Le module $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ est un $R[[\Gamma_d]]$-module et :

$$R[[\Gamma_d]] \xrightarrow{\sim} R[[X_1,\cdots,X_d]] \tag{1.5.2.3}$$

Dans ce qui suit, nous faisons l'hypothèse simplificatrice suivante.

Hypothèse 1.5.21. *Le nombre premier p ne divise pas $[K(1) : K]$.*

Sous l'hypothèse 1.5.21, les extensions D_∞ et $K(1)$ sont linéairement disjointes donc

$$\mathrm{Gal}(D_\infty(\mathfrak{c}l)/D_\infty(\mathfrak{c})) = \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l)/K(\mathfrak{c}))$$

pour $\mathfrak{c}l \in SK$. En particulier, ce groupe de Galois est cyclique et le lemme de Shapiro implique alors que :

$$H^1(D_\infty(\mathfrak{c}), \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \tag{1.5.2.4}$$

En effet, soit H_s le groupe de Galois absolu de $D_s(\mathfrak{c})$, G le groupe de Galois absolu de $K(\mathfrak{c})$ et $\mathrm{Ind}_s\,\mathcal{T}$ le module induit :

$$\mathrm{Ind}_s\,\mathcal{T} = \mathrm{Ind}_{H_s}^{G}\,\mathcal{T} \tag{1.5.2.5}$$

L'hypothèse 1.5.21 montre que D_∞ et $K(\mathfrak{c})$ sont linéairement disjointes pour tout $\mathfrak{c} \in SK$. Donc :

$$\mathrm{Gal}(D_s(\mathfrak{c})/K(\mathfrak{c})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(D_s/K)$$

Donc :

$$\mathrm{Ind}_s\,\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T} \otimes_R R[G/H_s] \xrightarrow{\sim} \mathcal{T} \otimes_R R[\mathrm{Gal}(D_s/K)]$$

Et :

$$H^1(D_\infty(\mathfrak{c}), \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} H^1(K(\mathfrak{c}), \varprojlim_s \mathrm{Ind}_s\,\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} H^1(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T} \otimes_R R[[\Gamma_d]]) \tag{1.5.2.6}$$

1.5.3 Classes dérivées de Kolyvagin

Les notations et hypothèses sont comme dans la sous-section précédente. Nous faisons en particulier l'hypothèse 1.5.21.

Soit $n \in SK$ et $l \in SK_1$. Le groupe cyclique $G_l = \mathrm{Gal}(K(l)/K(1))$ est d'ordre $(Nl+1)/u(1)$ engendré par σ_l. Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, nous résumons dans le diagramme suivant le comportement de l dans les extensions $K, K(n)$ et $K(nl)$.

$$\begin{tikzcd}
& w \arrow[d, dash, "\text{ramifie totalement}"] & & & K(nl) \\
v' \arrow[dr, dash] & v \arrow[d, dash] & v'' \arrow[dl, dash] & \cdots \arrow[dll, dash, "\text{décompose totalement}"] & K(n) \\
& \lambda \arrow[d, dash, "\text{inerte}"] & & & K \\
& l & & & F
\end{tikzcd}$$

Définition 1.5.22. *Pour $l \in SK_1$, soit I_l le plus petit idéal de R contenant $(N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)/u(1)$, $\lambda_{\mathfrak{m}}(l)$ et $\chi_\Gamma(\mathrm{Fr}(l)) - 1$. Soit D_l l'opérateur de dérivée de Kolyvagin :*

$$D_l = \sum_{i=0}^{|G_l|-1} i\sigma_l^i$$

Pour $n = l_1 \cdots l_r$ appartenant à SK_r, soit G_n le groupe $\mathrm{Gal}(K(n)/K(1))$, I_n l'idéal

$$I_n = \sum_{l|n} I_l$$

et D_n l'opérateur :

$$D_n = \prod_{l|n} D_l$$

La dérivée de Kolyvagin satisfait l'identité formelle suivante de $\mathbb{Z}[G_l]$:

$$(\sigma_l - 1)D_l = |G_l| - \sum_{i=0}^{|G_l|-1} \sigma_l^i \tag{1.5.3.1}$$

Donc :

$$(\sigma_l - 1)D_n = \left(|G_l| - \sum_{i=0}^{|G_l|-1} \sigma_l^i \right) D_{n/l}$$

Hypothèse 1.5.23. *La représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$ n'est pas diédrale.*

Lemme 1.5.24. *Soit r un entier positif et $n \in SK_r$.*

$$D_n z(n) \in H^1(K(n), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})^{G_n} = H^1(K(1), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$$

$$D_n \mathfrak{z}(n) \in H^1(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})^{G_n} = H^1(K(1), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Démonstration. Le groupe G_n étant isomorphe au produit des groupes cycliques G_l pour $l|n$, il suffit de montrer que $D_n z(n)$ est invariant par $\sigma_l - 1$ pour $l|n$.

$$(\sigma_l - 1)D_n z(n) = \left(|G_l| - \sum_{i=0}^{|G_l|-1} \sigma_l^i \right) D_{n/l} z(n)$$

La corestriction de $K(n)$ à $K(n/l)$ de $z(n)$ est égale d'après la proposition 1.5.18 à l'action de $T(l)_*$ sur $z(n/l)$. Donc :

$$(\sigma_l - 1)D_n z(n) = |G_l|D_{n/l}z(n) - D_{n/l}\lambda_f(l)z(n/l)$$

Par définition de I_n, $|G_l|$ et $\lambda_f(l)$ sont dans I_n. En tant qu'élément de

$$H^1(K(n), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$$

la classe $D_n z(n)$ vérifie donc :

$$(\sigma_l - 1) D_n z(n) = 0$$

Donc $z_n \in H^1(K(n), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})^{G_n}$. La suite d'inflation-restriction s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(K(n)/K(1), (\mathcal{T}/I_n\mathcal{T})^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(n))}) \longrightarrow H^1(K(1), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \\ \longrightarrow H^1(K(n), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})^{G_n} \longrightarrow H^2(K(n)/K(1), (\mathcal{T}/I_n\mathcal{T})^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(n))}) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 1.5.23, la représentation résiduelle de $\mathcal{T}$ est irréductible sur K donc le premier et le dernier terme de cette suite sont nuls. La classe $D_n z(n)$ se relève donc en une classe $\tilde{\kappa}(n)$ de $H^1(K(1), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$.

La démonstration de la deuxième assertion est identique en changeant $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ et z en $\mathfrak{z}$. □

Définition 1.5.25 (Classes de Kolyvagin)**.** *Nous faisons l'hypothèse 1.5.23. Pour $n \in SK_r$, soit :*

$$\tilde{\kappa}(n) = D_n z(n) \otimes_{l|n} \sigma_l \in H^1(K(1), \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \otimes G_n$$

Soit :

$$\kappa(n) = \mathrm{Cor}_{K(1)/K}\, \tilde{\kappa}(n)$$

La classe $\kappa(n)$ est appelée la classe de Kolyvagin en n de $\mathcal{T}$.

$$\kappa(n) \in H^1(K, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \otimes G_n$$

Soit par ailleurs :

$$\tilde{\varkappa}(n) = D_n \mathfrak{z}(n) \otimes_{l|n} \sigma_l \in H^1(K(1), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

Soit :

$$\kappa(n) = \mathrm{Cor}_{K(1)/K}\, \tilde{\varkappa}(n)$$

La classe $\varkappa(n)$ est appelée la classe de Kolyvagin en n de $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$.

$$\varkappa(n) \in H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

Chapitre 2

Théorie d'Iwasawa des systèmes d'Euler

2.1 Objectifs

Les résultats de la première partie nous fournissent un $R_{\mathrm{Iw}}[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ libre de rang 2, auto-dual et une famille de classes de cohomologie $\varkappa(n)$ dans $H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$. L'objectif de cette seconde partie est d'étudier les propriétés locales de $\varkappa(n)$ et de montrer en particulier qu'elles satisfont aux relations de définition d'un système de Kolyvagin en dehors de p.

Nous commençons par rappeler les fondations de la théorie des représentations galoisiennes dans la généralité qui nous intéresse. Soit donc T un R-module libre de rang fini pour R un anneau local complet noethérien de corps résiduel fini, de Gorenstein et intègre. Nous montrons ou rappelons tout d'abord des propriétés des finitudes sur la cohomologie locale et globale de telles représentations et rappelons les travaux de [MR04] sur les conditions cohomologiques locales et globales. Nous étudions ensuite plus précisément la cohomologie de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$. Nos résultats principaux sont résumés dans les propositions 2.2.9 page 120, 2.2.10 122 et 2.2.14 127. Nous considérons tout particulièrement la condition locale de Greenberg en v une place de K divisant (p) :

$$H^1_{Gr}(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) = \mathrm{im}(H^1(K_v, (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})^+_v) \longrightarrow H^1(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})) \qquad (2.1.0.1)$$

et sa propagation aux sous-quotients.

Nous suivons ensuite les techniques de [How07] pour établir ce que nous pouvons au sujet des classes $\varkappa(n)$. En les spécialisant en des points arithmétiques, nous montrons que les classes $z(n)$ et $\mathfrak{z}(n)$ sont des éléments des groupes de Selmer de Greenberg respectifs

$$H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T})$$

et :

$$H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Si λ est une place finie de K ne divisant pas (p), les classes dérivées $\kappa(n)$ et $\varkappa(n)$ sont dans

$$H^1_{Gr(n)}(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \otimes G_n$$

et :

$$H^1_{Gr(n)}(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

Voir les proposition 2.2.18 page 133 et 2.2.19 page 134 pour les détails. En (p), bien que $D_n\mathfrak{z}(n)$ appartienne à $H^1_{Gr}(K(n)_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$, je ne sais pas montrer que $\varkappa(n)$ est bien dans l'image de

$$H^1_{Gr}(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1_{Gr}(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

ou, ce qui revient au même quitte à tolérer des bornes plus grossières dans l'application de la méthode des systèmes de Kolyvagin, je ne sais pas annihiler uniformément le conoyau de :

$$H^1(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1(K_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Dans les exemples similaires connus, par exemple le cas des variétés abéliennes de type GL_2 et de la déformation anticyclotomique traité dans [How04b], l'idéal I_n est engendré par des éléments de $\mathcal{O}$ donc est principal. Ce fait en apparence anodin simplifie grandement la démonstration de cette étape. Dans notre contexte, la présence d'un caractère central implique que I_n contient des éléments de R et complique en conséquence la détermination du conoyau

Nous concluons cette partie, et donc ce travail, par un calcul montrant que les images des classes $\varkappa(n)$ par les spécialisations à valeurs dans des anneaux de valuation discrète plat et fini sur $\mathcal{O}$ vérifient la propriété de compatibilité des systèmes de Kolyvagin. Ceci n'est pas affecté par notre ignorance du comportement en (p) de ces classes puisque la relation de compatibilité est purement locale en un premier de Kolyvagin l.

2.2 Représentations p-adiques et groupes de Selmer

2.2.1 Représentations p-adiques et structures de Selmer

Nous rappelons des faits bien connus sur les représentations galoisiennes à coefficients dans un anneau local complet noethérien. Ce qui suit est souvent tiré directement de [MR04], [Rub00] et [Nek06].

Représentations p-adiques et dualités

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}_l$ pour l un nombre premier rationnel, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et p un nombre premier rationnel impair. Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places au-dessus de p. Soit R un anneau noethérien local complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k de caractéristique p. Nous disons qu'un $R[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module T est une R-représentation si T est R-module de type fini muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ non-ramifiée en dehors de S.

Si R est l'anneau des entiers d'une extension finie $L_\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Q}_p$, nous le notons $\mathcal{O}$ en conformité avec nos notations du chapitre précédent. Si de plus T est un $\mathcal{O}$-module libre, nous lui associons les $\mathcal{O}$-modules V et A suivants :

$$\begin{aligned} V &= T \otimes_{\mathcal{O}} L_\mathfrak{p} \\ A &= T \otimes_{\mathcal{O}} L_\mathfrak{p}/\mathcal{O} \end{aligned}$$

Ils s'insèrent dans la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

L'étude de T s'accompagne naturellement de l'étude de certains modules duaux de T.

$$\begin{aligned} T^* &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T, \mathcal{O}) \\ V^* &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V, L_\mathfrak{p}) \\ A^* &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T, L_\mathfrak{p}/\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Soit $D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot, L_\mathfrak{p}/\mathcal{O})$ le foncteur de dualité de Pontryagin, $\mathcal{D}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot, \mathcal{O})$ et Φ le foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{O}} L_\mathfrak{p}/\mathcal{O}$. Les modules T, T^*, A et A^* sont reliés par le diagramme de dualité suivant :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathcal{D}"] \arrow[dd, "\Phi"'] \arrow[ddrr, leftrightarrow] & & T^* \arrow[dd, "\Phi"] \arrow[ddll, leftrightarrow, "D"] \\ & & \\ A & & A^* \end{tikzcd} \tag{2.2.1.1}$$

Le cas intermédiaire qui nous intéresse particulièrement ici est celui où R est supposé être intègre, de Gorenstein et de corps résiduel k fini et où T est un R-module libre. Dans ce cas-là, le R-module T est compact, séparé et totalement discontinu. Soit I une enveloppe injective de k et D le foncteur $\mathrm{Hom}_R(\cdot, I)$. Soit $A^* = D(T)$. D'après [BH93] théorème 3.2.13, le morphisme canonique de T dans $D(D(T))$ est un isomorphisme :

$$T \xleftrightarrow{\;D\;} A^*$$

Nous disons qu'un tel foncteur est dualisant. D'après [Har67] proposition 4.10, tout foncteur dualisant est de la forme $\mathrm{Hom}_R(\cdot, I)$ pour I une enveloppe injective de k. D'après [BH93] proposition 3.2.4, toutes les enveloppes injectives sont isomorphes donc il n'y a pas de perte de généralité à fixer I. La dualité de Pontryagin $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est un foncteur dualisant et vérifie :

$$\mathrm{Hom}(T, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}(R, \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$$

Donc $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est une enveloppe injective de k et c'est celle que nous choisirons dans cette situation. Par ailleurs, l'anneau R est de Gorenstein donc est son propre module dualisant et T est de même dimension que R donc le morphisme canonique de T dans $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(T, R), R)$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathcal{D}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_R(\cdot, R)$. Soit Φ le foncteur $(\cdot) \otimes_R I$. Soit $A^* = D(T)$, $A = \Phi(T)$ et $T^* = \mathcal{D}(A)$. Les modules T, T^*, A et A^* sont reliés par le diagramme de dualité suivant :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathcal{D}"] \arrow[dd, "\Phi"'] \arrow[ddrr, leftrightarrow] & & T^* \arrow[dd, "\Phi"] \arrow[ddll, leftrightarrow, "D"'] \\ & & \\ A & & A^* \end{tikzcd} \tag{2.2.1.2}$$

Revenons au cas d'une R-représentation pour R complet local noethérien quelconque. Comme il est observé dans [Nek06], il est alors nécessaire de travailler dans la catégorie dérivée des complexes bornés de R-modules. Pour le confort du lecteur qui souhaiterait travailler dans le formalisme des complexes de Selmer, nous nous efforçons dans ce qui suit de donner les références nécessaires. Lorsque T est un objet de la catégorie dérivée des complexes bornés de R-modules, l'équivalent du diagramme 2.2.1.1 est donné par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathcal{D}"] \arrow[dd, "\Phi"'] \arrow[ddrr, leftrightarrow] & & T^* \arrow[dd, "\Phi"] \arrow[ddll, leftrightarrow, "D"'] \\ & & \\ A & & A^* \end{tikzcd}$$

Les foncteurs D, $\mathcal{D}$ et Φ sont définis dans [Nek06] chapitre 2, voir par exemple le paragraphe (2.8.5).

Cohomologie des R-représentations

L'objet entier de 2.2.1 est la preuve d'un résultat de finitude sur la cohomologie des R-représentations pour R noethérien local complet de corps résiduel fini.

Lemme 2.2.1. *Soit R un anneau noethérien local complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et x un élément de $\mathfrak{m}$. Soit T un R-module. Si le R/x-module est de type fini, alors T est de type fini sur R.*

Démonstration. Comme d'habitude dans cette situation, il suffit de démontrer que si un R-module M compact vérifie $xM = M$ alors $M = 0$. Supposons donc $xM = 0$ et soit U un voisinage ouvert de zéro. Le module M est compact donc il existe une famille (U_i) d'ouverts recouvrant M. Pour n assez grand, $x^n U_i$ est inclus dans U donc $x^n M$ est inclus dans U. Mais $x^n M = M$ donc M est inclus dans U. Le module M est séparé donc M est nul. □

Proposition 2.2.2. *Soit R un anneau local complet noethérien de corps résiduel fini de caractéristique p. Soit T une R-représentation. Soit K un corps de nombres, v une place de K et i un entier positif. Soit Σ un ensemble de places de K contenant les places au-dessus de p et les places de ramifications de T. Soit G le groupe de Galois absolu G_v de K_v ou le groupe de Galois absolu $G_{K,\Sigma}$ de l'extension maximale de K non-ramifiée en dehors de Σ. Alors le module $H^i(G,T)$ est de type fini sur R.*

Démonstration. Supposons tout d'abord R de dimension 0 et de longueur s. La représentation T est alors égale à $T/\mathfrak{m}^s T$ et est donc un p-groupe fini. D'après [NSW00] théorème 7.1.8 si $G = G_v$ et 8.3.19 si $G = G_{K,\Sigma}$, le groupe de cohomologie $H^i(G, T/\mathfrak{m}^s T)$ est donc fini pour tout i supérieur à zéro.

Supposons maintenant R de dimension d et supposons que pour tout anneau R' local complet noethérien de dimension strictement inférieure à d et tout R'-module M de type fini et non-ramifié en dehors de Σ, les R'-modules $H^i(G,M)$ sont de type fini. Soit alors x un élément de l'ensemble générateur de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R. La suite exacte

$$T \xrightarrow{x} T \longrightarrow T/xT \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$H^i(G,T) \xrightarrow{x} H^i(G,T) \longrightarrow H^i(G,T/xT)$$

donc une injection :

$$H^i(G,T)/xH^i(G,T) \hookrightarrow H^i(G,T/xT)$$

Le R/x-module T/xT est de type fini donc le R/x-module $H^i(G,T/xT)$ est de type fini par hypothèse de récurrence. Donc $H^i(G,T)/xH^i(G,T)$ est de type fini sur R/x. Par ailleurs, l'anneau $R/\mathfrak{m}^s$ est de dimension zéro donc pour tout j inférieur à i le groupe $H^j(G,T/\mathfrak{m}^s T)$ est de type fini sur $T/\mathfrak{m}^s T$, donc de cardinal fini. D'après le corollaire 2.3.5 de [NSW00] :

$$H^i(G,T) = \varprojlim_s H^i(G,T/\mathfrak{m}^s T)$$

Le groupe $H^i(G,T)$ est donc compact. Le lemme 2.2.1 montre alors que $H^i(G,T)$ est de type fini sur R. □

Conditions locales

Nous rappelons le traitement des conditions cohomologiques locales de [MR04]. Dans ce paragraphe, nous supposons que K est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ de corps résiduel $\mathbb{F}$. Nous notons K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K et $\mathcal{I}$ le groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K^{nr})$. La suite courte suivante est exacte.

$$1 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}) \longrightarrow 1$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ est procyclique et conformément à nos conventions du premier chapitre, nous prenons le morphisme de Frobenius géométrique comme générateur topologique. Nous rappelons que K^{nr} et $\mathbb{F}$ sont de dimension au plus 1 et parfaits, donc que $\mathcal{I}$ et $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ sont de dimension cohomologique au plus 1. Nous rappelons que R est un anneau noethérien local complet de corps résiduel fini et que T est une R-représentation. La suite d'inflation-restriction fournit alors la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{F}, T^{\mathcal{I}}) \longrightarrow H^1(K,T) \longrightarrow H^1(\mathcal{I},T)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})} \longrightarrow 0$$

Une condition locale f sur T est un choix de sous R-module :

$$H^1_f(K,T) \subset H^1(K,T)$$

Une condition locale est dite fonctorielle pour une certaine sous-catégorie C de la catégorie des $R[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]]$-modules si

$$T \longmapsto H^1_f(K,T)$$

est un sous-foncteur de cette catégorie dans la catégorie des R-modules. Dans ce cas, nous notons $\mathcal{F}$ ce foncteur.

La donnée d'une condition locale sur T fournit une condition locale sur tous les sous-modules et sur tous les modules quotients de T. Soit en effet $T_1 \hookrightarrow T$ et $T \twoheadrightarrow T_2$. Nous pouvons définir $H^1_f(K,T_1)$ comme l'image inverse de $H^1_f(K,T)$ par l'application induite par l'injection de T_1 dans T et $H^1_f(K,T_2)$ l'image de $H^1_f(K,T)$ par l'application induite par la surjection de T sur T_2. Nous appelons propagation d'une condition locale son extension par ce procédé aux sous-modules et aux quotients de T. Nous mettons néanmoins en garde le lecteur sur l'ambiguïté qui consiste à poser de telles définitions, dans la mesure où rien ne garantit qu'une condition locale fonctorielle coïncide avec sa propagation. En effet, si une condition locale f est fonctorielle pour une catégorie C, si T_1 et T_2 sont des R-représentations appartenant à C et si α est un C-morphisme injectif

$$\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$$

nous disposons de deux choix possibles de $H^1_f(K,T_1)$: ou bien nous prenons pour $H^1_f(K,T_1)$ l'image de T_1 par $\mathcal{F}$ ou bien nous prenons pour $H^1_f(K,T_1)$ l'image inverse de $H^1_f(K,T_2)$ par α. Nous disons que la condition locale $\mathcal{F}$ est cartésienne si ces deux choix coïncident. Cela signifie également que $\mathcal{F}$ coïncide avec sa propagation aux sous-modules.

Définition 2.2.3. *Une condition locale fonctorielle est cartésienne si et seulement si le diagramme suivant est cartésien pour toute injection α.*

$$\begin{tikzcd} H^1_f(K,T_1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & H^1(K,T_1) \arrow[d, "\alpha"] \\ H^1_f(K,T_2) \arrow[r, hook] & H^1(K,T_2) \end{tikzcd}$$

Soit L une extension de K. Par inflation-restriction, $H^1(L/K, T^{\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)})$ est le noyau de

$$0 \longrightarrow H^1(L/K, T^{\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)}) \longrightarrow H^1(K,T) \longrightarrow H^1(L,T)$$

Donc $H^1_L(K,T) = H^1(L/K, T^{\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)})$ s'identifie à un sous-module de $H^1(K,T)$. A L est donc associée une condition locale fonctorielle H^1_L (pour n'importe quelle sous-catégorie de $R[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]]$-modules). En général, H^1_L n'est ni cartésienne, ni égale sur un sous-quotient à sa propagation. Nous nous intéressons en particulier aux choix de L suivants.

1. Soit $L = K$. Alors $H^1_L(K,T) = 0$. Nous appelons cette condition locale la condition stricte et la notons H^1_{str}
2. Soit $L = \bar{K}$. Alors $H^1_L(K,T) = H^1(K,T)$. Nous appelons cette condition locale la condition relaxée et la notons H^1_{rel}
3. Soit $L = K^{nr}$. Alors :
$$H^1_L(K,T) = H^1(\mathbb{F}, T^{\mathcal{I}})$$
Nous appelons cette condition locale la condition non-ramifiée et la notons H^1_{nr}.
4. Soit K un corps de caractéristique résiduelle différente de p et L la p-extension abélienne totalement modérément ramifiée maximale de K. Nous appelons la condition locale associée à L la condition L-transverse et la notons H^1_{tr}.

Nous considérons encore deux conditions locales particulières. Supposons que T est un $R[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module libre de rang 2 et qu'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T^+ \longrightarrow T \longrightarrow T^- \longrightarrow 0$$

avec T^+ et T^- libres de rang 1. Soit :

$$H^1_{Gr}(K,T) = \ker(H^1(K,T) \longrightarrow H^1(K,T^-)) \tag{2.2.1.3}$$

Nous appelons cette condition locale la condition de Greenberg relative à T^+. La condition de Greenberg est définie et étudiée par exemple dans [Gre91] et [Gre89].

Enfin, soit T un $L_{\mathfrak{p}}$-espace vectoriel pour $L_{\mathfrak{p}}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit B_{cris} l'anneau des périodes p-adiques de Fontaine. Soit :

$$H^1_f(K,T) = \ker(H^1(K,T) \longrightarrow H^1(K, T \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}})) \tag{2.2.1.4}$$

Les anneaux des périodes p-adiques sont définis et étudiés par exemple dans [Per94] et la condition de Bloch-Kato dans [BK90], [FPR94].

Pour f une condition locale, le quotient singulier de $H^1(K,T)$ est défini par la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^1_f(K,T) \longrightarrow H^1(K,T) \longrightarrow H^1_s(K,T) \longrightarrow 0 \tag{2.2.1.5}$$

Lemme 2.2.4. *Soit C la catégorie de $R[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]]$-modules non-ramifiés. La condition locale non-ramifiée sur C est cartésienne et coïncide avec sa propagation aux sous-quotients. Plus généralement, si*

$$\pi : T_1 \longrightarrow T_2$$

est un morphisme surjectif de R-représentations et si

$$\pi : T_1^{\mathcal{I}} \longrightarrow T_2^{\mathcal{I}}$$

est surjectif, alors π induit un morphisme surjectif :

$$\pi : H^1_{nr}(K,T_1) \longrightarrow H^1_{nr}(K,T_2)$$

Démonstration. La première assertion est le lemme 1.1.9 de [MR04]. Si π est comme dans la proposition, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T_1^{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi} T_2^{\mathcal{I}} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue de cohomologie

$$H^1_{nr}(K,T_1) \xrightarrow{\pi} H^1_{nr}(K,T_2) \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}),A) \longrightarrow 0$$

Le corps $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ est de dimension cohomologique 1 donc le morphisme π induit en cohomologie est surjectif. □

Lemme 2.2.5. *Soit K de caractéristique résiduelle différente de p. Soit T un $R[[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]]$-module non-ramifié de type fini tel que :*

$$|\mathbb{F}^\times| \cdot T = 0$$

Alors, il existe des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} H^1_{nr}(K,T) &\xrightarrow{\sim} T/(\mathrm{Fr}-1)T \\ H^1_s(K,T) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{I},T^{\mathrm{Fr}=1}) \\ H^1_s(K,T)\otimes\mathbb{F}^\times &\xrightarrow{\sim} T^{\mathrm{Fr}=1} \end{aligned}$$

Si de plus $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ agit trivialement sur T, alors :

$$H^1_{nr}(K,T) \xrightarrow{\sim} H^1_s(K,T)$$

Démonstration. Il s'agit des 1.2.1 et 1.2.3 de [MR04] et de la première assertion de [Ser68] XIII.1.

□

Lemme 2.2.6. *Nous conservons les hypothèses du lemme 2.2.5. Soit L la p-extension abélienne totalement modérément ramifiée maximale de K. Le groupe de cohomologie L-transverse $H^1_{tr}(K,T)$ réalise un scindage de la suite exacte courte 2.2.1.5.*

Démonstration. Il s'agit du lemme 1.2.4 de [MR04]. □

Supposons R de Gorenstein et de corps résiduel k fini et soit $I = \mathrm{Hom}(R, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dont nous rappelons que c'est une enveloppe injective de k. Soit :

$$A^*(1) = D(T)(1) = \mathrm{Hom}(T, I)(1)$$

La dualité de Tate s'écrit :

$$< \cdot, \cdot > : H^1(K,T) \times H^1(K, A^*(1)) \longrightarrow H^2(K, I(1)) \xrightarrow{\sim} I$$

La donnée d'une condition locale fonctorielle F sur T induit potentiellement deux conditions locales sur $A^*(1)$: ou bien $F(A^*(1))$, ou bien le complémentaire orthogonal de $F(T)$ pour la dualité de Tate. Nous disons qu'une condition locale est auto-duale si ces deux définitions coïncident. Lorsqu'une condition locale n'est pas auto-duale, nous prenons la convention que :

$$H^1_{f^*}(K, A^*(1)) = H^1_f(K,T)^{\perp}$$

Par exemple, $H^1_{rel^*}(K, A^*(1)) = 0$.

Lemme 2.2.7. *Nous conservons les hypothèses du lemme 2.2.5. Les conditions locales non-ramifiée et transverse sont auto-duales.*

Démonstration. Il s'agit de la proposition 1.3.2 de [MR04]. Nous profitons de l'occasion de cette preuve pour mentionner au lecteur familier de [MR04] que nos notations tendent à coïncider avec celles de cet ouvrage mais qu'ils notent T^* ce que nous notons $D(T)(1)$. □

Conditions globales

Nous suivons toujours [MR04]. Dans ce paragraphe, K est une extension finie de $\mathbb{Q}$. L'anneau R est supposé être intègre, de Gorenstein et de corps résiduel fini de caractéristique p. La R-représentation T est supposée être libre de rang fini sur R. Soit S l'ensemble fini des places de ramification de T.

La donnée d'une condition cohomologique globale (f, Σ) est la donnée d'un ensemble fini Σ de places contenant S, les places au-dessus de (p) et les places infinies de K ainsi que d'une condition cohomologique locale $H^1_f(K_v,T)$ en chaque $v\in\Sigma$. Nous remarquons en particulier que Σ est non-vide. La caractéristique résiduelle de R étant supposée impaire, le groupe de cohomologie $H^1(K_v,T)$ pour $v|\infty$ de T est nulle, et nous nous restreignons donc à l'étude des conditions locales en les places finies. Le groupe de Selmer $H^1_{f,\Sigma}(K,T)$ associé à la condition globale (f,Σ) est le sous-groupe des classes non-ramifiées en dehors de Σ et dont la localisation en $v\in\Sigma$ appartient à $H^1_f(K_v,T)$. Autrement dit, c appartient à $H^1_{f,\Sigma}(K,T)$ si et seulement si :

1. c_v appartient à $H^1_{nr}(K_v,T)$ pour $v\notin\Sigma$.
2. c_v appartient à $H^1_f(K_v,T)$ pour $v\in\Sigma$.

De façon équivalente, les classes de $H^1_f(K,T)$ satisfont une condition locale en chaque place finie mais cette condition locale est la condition locale non-ramifiée en presque toute place. Pour cette raison, nous nous permettons d'utiliser la notation $H^1_{f,\Sigma}(K_v,T)$ pour $v\notin\Sigma$ pour désigner $H^1_{nr}(K_v,T)$. Lorsque le contexte le permet, nous omettons de mentionner l'ensemble Σ dans nos notations.

La donnée d'une condition globale sur T induit une condition globale sur tous les sous-quotients de T par propagation de chaque condition locale. Elle induit également une condition globale (f^*,Σ) pour $A^*(1)$ en prenant pour chaque condition locale la condition locale induite par dualité de Tate.

La proposition 2.2.2 a un corollaire crucial concernant l'absence de ramification des classes vivant dans certaines limites projectives.

Proposition 2.2.8. *Soit K un corps de nombres et K_∞ une $\mathbb{Z}_p^d$-extension de K avec $d\geq 1$. Soit T un $R[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module de type fini. Soit :*

$$c\in\varprojlim_{K\subset L\subset K_\infty} H^1(L,T)$$

La limite est prise pour la corestriction sur les extensions L/K finies. Soit c_L l'image de c dans $H^1(L,T)$. Soit v une place de L ne divisant pas (p) et dont le groupe de décomposition dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est infini. Alors $(c_L)_v$ appartient à $H^1_{nr}(L_v,T)$.

Démonstration. La preuve suivante est celle de [Rub00] corollaire B.3.5. Soit w une place de K_∞ divisant v. Le groupe de décomposition de v dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est infini donc il existe une extension finie M telle que w ne se décompose pas complètement dans K_∞/M. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}((K_\infty)_w/M_w)$ est un sous-groupe infini de $\mathrm{Gal}(K_\infty/L)$ donc M admet une $\mathbb{Z}_p$ sous-extension M_∞ incluse dans K_∞. Le système compatible c induit un système compatible :

$$c'\in\varprojlim_{M_w\subset N_w\subset(M_\infty)_w} H^1(N_w,T)$$

Soit I_w le groupe d'inertie de M_w. La place v ne divise pas (p) donc w ne divise pas (p) donc la $\mathbb{Z}_p$-extension $(M_\infty)_w$ est non-ramifiée. Le groupe I_w est donc le groupe d'inertie de N_w pour toute extension finie $M_w \subset N_w \subset (M_\infty)_w$. La suite d'inflation-restriction pour $G = \mathrm{Gal}(\bar{N}_w/N_w)$ et I_w s'écrit alors :

$$0 \longrightarrow H^1_{nr}(N_w, T) \longrightarrow H^1(N_w, T) \longrightarrow H^1(I_w, T)^{G/I_w} \longrightarrow 0$$

Le dernier terme est nul car la dimension cohomologique du groupe de Galois absolu d'un corps fini est 1. D'après la proposition 2.2.2, le R-module $H^1(N_w, T)$ est de type fini. Il existe donc une extension N'_w finie de groupe de Galois absolu G' telle que :

$$H^1(I_w, T)^{G'/I_w} = \bigcup_N H^1(I_w, T)^{G/I_w}$$

Donc :

$$\varprojlim_N H^1(I_w, T)^{G/I_w} = \varprojlim_N H^1(I_w, T)^{G'/I_w}$$

Les deux limites projectives sont prises pour la corestriction dans la tour d'extension :

$$M_w \subset N_w \subset (M_\infty)_w$$

Sur $H^1(I_w, T)^{G'/I_w}$, la corestriction est la multiplication par une puissance de p donc le R-module de type fini $\varprojlim_N H^1(I_w, T)^{G'/I_w}$ est p-divisible. Il est donc nul.

Donc :

$$\varprojlim_N H^1_{nr}(N_w, T) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_N H^1(N_w, T)$$

Le système de classes c' appartient par conséquent à $\varprojlim_N H^1_{nr}(N_w, T)$.

Nous avons montré que pour tout $w|v$, il existe une extension M finie telle que c_M soit non-ramifiée en w. La classe c_L est égale à la corestriction de M à L de c_M donc c_L appartient à l'image par corestriction de la cohomologie non-ramifiée en w pour tout w. La classe c_L appartient donc à la cohomologie non-ramifiée. $\square$

Étant donnée une condition globale (f, Σ), nous considérons également plusieurs conditions globales (f', Σ') avec $\Sigma \subset \Sigma'$. Soit S_{tr} un ensemble de places finies d'intersection vide avec Σ. En $v \in S_{tr}$, nous supposons fixée une p-extension abélienne L totalement modérément ramifiée maximale à laquelle nous associons la condition locale transverse $H^1_{tr}(K_v, \cdot)$. En particulier, pour a, b deux idéaux de $\mathcal{O}_K$ premiers avec Σ et c un idéal de $\mathcal{O}_K$ dont le support est inclus dans S_{tr}, nous notons $(f_a^b(c), \Sigma \cap \{v|abc\})$ la condition globale définie localement par :

$$H^1_{f_a^b(c)}(K_v, T) = \begin{cases} H^1_f(K_v, T) & \text{si } v \in \Sigma \\ H^1_{str}(K_v, T) & \text{si } v|a \\ H^1_{rel}(K_v, T) & \text{si } v|b \\ H^1_{tr}(K_v, T) & \text{si } v|c \end{cases} \tag{2.2.1.6}$$

Si l est une place finie de K n'appartenant pas à Σ, ces groupes s'inscrivent dans les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1_{f_l}(K,T) \longrightarrow H^1_f(K,T) \longrightarrow H^1_{nr}(K_l,T) \\ 0 \longrightarrow H^1_f(K,T) \longrightarrow H^1_{f^l}(K,T) \longrightarrow H^1_s(K_l,T) \end{aligned} \tag{2.2.1.7}$$

Par définition pour les conditions strictes et relaxées et d'après le lemme 2.2.7 pour la condition transverse, la condition duale de $f^b_a(c)$ est $(f^*)^a_b(c)$.

Complexes de Selmer

Nous rappelons ici quelques définitions essentielles sur les structures de Selmer associées à des complexes de modules. Sauf mention contraire, toutes les références de cette sous-section sont à [Nek06]. Soit X un complexe de $R[G_{K,S}]$-modules admissibles (voir la définition 3.2.1). Une condition locale Δ_v en $v \in S$ est la donnée d'un morphisme de complexes de R-modules dans le complexe des cochaînes continues à valeurs dans X.

$$i_v^+ : U_v^+(X) \longrightarrow C^\bullet(G_v, X)$$

Une condition globale Δ est la donnée d'une condition locale en chaque place de S. Soit $res_S - i_S^+$ le morphisme de complexe donné par :

$$res_S - i_S^+ : C^\bullet(G_{K,S}, X) \oplus \bigoplus_{v\in S} U_v^+(X) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} C^\bullet(G_v, X)$$

Le complexe de Selmer $\tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X, \Delta)$ est alors défini par :

$$\tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X, \Delta) = \mathrm{Cone}(res_S - i_S^+)[-1]$$

Nous notons $\tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X)$ le complexe de Selmer $\tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X, \Delta)$ quand le contexte impose la condition globale Δ. Soit $\tilde{H}^i_f(G_{K,S}, X)$ le i-ème groupe de cohomologie de $\tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X)$.

Nous remarquons que si

$$(i_S^+)_* : H^i(G_v, U_v^+(X)) \longrightarrow H^i(G_v, X)$$

est bijective pour $i \leq 0$ et injective pour $i = 1$, alors $\tilde{H}^i_f(G_{K,S}, X)$ est isomorphe à $H^i(G_{K,S}, X)$ pour $i \leq 0$ et $\tilde{H}^1_f(G_{K,S}, X)$ est isomorphe à $H^1_f(K, X)$ pour la condition globale donnée (f, S) donnée localement par le sous-groupe $H^1(G_v, U_v^+(X))$.

Dans le cas général, nous posons pour $v \in S$:

$$U_v^-(X) = \mathrm{Cone}(U_v^+(X) \xrightarrow{-i_v^+} C^\bullet(G_v, X))$$

Soit $U^-(X)$ la somme directe de tous les $U_v^-(X)$. Par définition, la suite de complexes ci-dessous est exacte.

$$0 \longrightarrow U_S^-(X) \longrightarrow \tilde{C}^\bullet_f(G_{K,S}, X) \longrightarrow C^\bullet(G_{K,S}, X) \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} H^{i-1}(G_v, U_v^-(X)) \longrightarrow \tilde{H}^i_f(G_{K,S}, X) \longrightarrow H^i(G_{K,S}, X) \qquad (2.2.1.8)$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{v\in S} H^i(G_v, U_v^-(X)) \longrightarrow \cdots$$

L'étude des propriétés des conditions cohomologiques locales au niveau des complexes est considérablement plus ardue qu'au niveau des modules. Une condition locale générale est définie au chapitre 6 et la condition locale non-ramifiée fait l'objet du chapitre 7 de [Nek06]. Il existe un formalisme généralisant la dualité de Tate, voir par exemple le théorème 5.4.5, mais la condition non-ramifiée n'est plus auto-duale, voir les propositions 7.6.7 et 7.6.11.

2.2.2 Cohomologie de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$

A partir de maintenant, nous revenons dans le cadre d'étude du chapitre premier. Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}_\infty(R)$ le $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module libre de rang 2 sur R défini dans la sous-section 1.4.5 et $\lambda_{\mathfrak{m}}$ le morphisme associé à R. Nous rappelons que R est supposé être intègre. Soit Γ_d le groupe de Galois de l'extension D_∞ de la définition 1.5.20. Nous souhaitons étudier la cohomologie locale des représentations :

$$\mathcal{T} = \mathcal{W}^{dual}_\infty(R)(1) \otimes \chi_\Gamma^{-1/2}\chi^{-1}$$
$$\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} = \mathcal{T} \otimes_R R[[\Gamma_d]]$$

Soit $\mathcal{K} = \mathrm{Frac}(R)$ et $\mathcal{K}_{\mathrm{Iw}} = \mathrm{Frac}(R[[\Gamma_d]])$. Soit :

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \otimes_R \mathcal{K}$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{T} \otimes_R \mathcal{K}/R$$
$$\mathcal{V}_{\mathrm{Iw}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}} \mathcal{K}_{\mathrm{Iw}}$$
$$\mathcal{A}_{\mathrm{Iw}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}} \mathcal{K}_{\mathrm{Iw}}/R_{\mathrm{Iw}}$$

Propriétés de finitude

Soit Σ l'union de l'ensemble des places de ramification de $\mathcal{T}$, des places au-dessus de (p) et des places à l'infini. Nous remarquons que $\mathcal{T}$ peut non-seulement être ramifiée en $\mathcal{N}(p) \cup S_B$ mais aussi en les places de ramifications de χ.

Proposition 2.2.9. *Soit v une place finie de F ne divisant pas (p), L une extension finie de F et w une place de L divisant v. Soit i un entier positif. Alors :*

$$H^i(L_w, \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}) = 0,\ \ H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes \mathcal{K}_{\mathrm{Iw}}) = 0$$

De plus, les modules $H^0(L_w, \mathcal{T})$ et $H^0(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ sont nuls ; $H^i(L_w, \mathcal{T})$ et $H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ sont de torsion ; $H^i(L_w, \mathcal{A})$ et $H^i(L_w, \mathcal{A}_{\mathrm{Iw}})$ sont de type fini sur R et R_{Iw} respectivement.

Démonstration. Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de poids pair strictement supérieur à 2 et $R_{\mathcal{P}}$ le localisé de R en $\mathcal{P}$. L'anneau $R_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète ; soit $\pi_{\mathcal{P}}$ un générateur de son idéal maximal. La représentation $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est alors isomorphe à $V(f_{\mathcal{P}})(k/2) \otimes \psi$ où ψ est un caractère d'ordre fini. D'après la proposition 1.3.1, les groupes $H^i(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(k/2) \otimes \psi)$ sont nuls pour tout i. La suite exacte

$$H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{P}}} H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \longrightarrow H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathcal{P}})$$

montre alors que :

$$H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})/\mathcal{P}H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}) = 0$$

La cohomologie commute avec la localisation en $\mathcal{P}$, par exemple d'après la proposition 3.4.4 de [Nek06], donc le groupe $H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est de type fini sur $R_{\mathcal{P}}$. Donc $H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est nul. L'isomorphisme

$$H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \otimes_{R_{\mathcal{P}}} \mathrm{Frac}(R_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} H^i(L_w, \mathcal{T} \otimes_R \mathcal{K})$$

implique alors que $H^i(L_w, \mathcal{T} \otimes_R \mathcal{K})$ est nul. En particulier, la suite longue de cohomologie montre que $H^0(L_w, \mathcal{T})$ est nul et que $H^i(L_w, \mathcal{A})$ s'injecte dans $H^i(L_w, \mathcal{T})$ donc est de type fini sur R. En général, le groupe $H^{i-1}(L_w, \mathcal{T} \otimes_R \mathcal{K}/R)$ se surjecte sur $H^i(L_w, \mathcal{T})$ donc $H^i(L_w, \mathcal{T})$ est de torsion.

Nous voyons que l'ingrédient essentiel de la démonstration pour $\mathcal{T}$ est le fait que

$$H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) = 0$$

pour tout i. Soit R^n l'anneau $R[[X_1, \cdots, X_n]]$ et $\mathcal{T}^n$ la R^n-représentation :

$$\mathcal{T}^n = \mathcal{T} \otimes_R R^n$$

Supposons que nous sachions que $H^i(\mathcal{T} \otimes_R \mathrm{Frac}(R^{n-1}))$ est nul pour tout entier i. Alors :

$$R^n_{X_n} = \mathrm{Frac}(R^{n-1})[[X_n]]$$

Donc :

$$(\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n} = \mathcal{T} \otimes_R \mathrm{Frac}(R^{n-1})[[X_n]]$$

Soit encore :

$$(\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n}/X_n = \mathcal{T} \otimes_R \mathrm{Frac}(R^{n-1})$$

La cohomologie

$$H^i(L_w, (\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n}/X_n)$$

est donc nulle. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n} \xrightarrow{X_n} (\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n} \longrightarrow (\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n}/X_n \longrightarrow 0$$

et le lemme de Nakayama montrent alors que :

$$H^i(L_w, (\mathcal{T} \otimes_R R^n)_{X_n}) = 0$$

Donc :

$$H^i(L_w, \mathcal{T} \otimes_R \mathrm{Frac}(R^n)) = 0$$

Ceci montre que $H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}} \mathcal{K}_{\mathrm{Iw}})$ est nul pour tout i. La suite exacte longue de cohomologie implique alors que $H^0(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ et que $H^i(L_w, \mathcal{A}_{\mathrm{Iw}})$ est en bijection avec $H^i(L_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ donc est de type fini de torsion. □

Corollaire 2.2.10. *Soit K^Σ l'extension maximale non-ramifiée en dehors de Σ.*

$$H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) = H^1(K^\Sigma/K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

En particulier, le R_{Iw}-module $H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ est de type fini.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour v n'appartenant pas à Σ et w une place de K au-dessus de v, le groupe $H^1(K_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ ne contient que des classes non-ramifiées. Soit donc de tels v et w. La représentation $\mathcal{T}$ est non-ramifiée en w donc :

$$H^1_{nr}(K_w, \mathcal{T}) = H^1(\mathrm{Gal}(K_w^{nr}/K), \mathcal{T})$$

Soit L_λ une extension finie de K_w. Par la suite d'inflation-restriction :

$$H^1(L_\lambda, \mathcal{T})/H^1_{nr}(L_\lambda, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{I}_\lambda, \mathcal{T})^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_\lambda, \mathcal{T})^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$$

Le premier isomorphisme vient du fait que le groupe $<\mathrm{Fr}(\lambda)>$ est de dimension cohomologique 1. La place λ ne divise pas p donc un morphisme de $\mathcal{I}_\lambda$ dans $\mathcal{T}$ se factorise à travers l'inertie quotientée par l'inertie sauvage, donc à travers un pro-p-groupe cyclique. L'action du morphisme de Frobenius par conjugaison sur $\mathcal{I}_\lambda$ quotientée par sa partie sauvage vérifie :

$$\mathrm{Fr}(\lambda)^{-1}\sigma\,\mathrm{Fr}(\lambda) = (N_{F/\mathbb{Q}}\lambda)\sigma$$

Donc :

$$H^1(L_\lambda, \mathcal{T})/H^1_{nr}(L_\lambda, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$$

Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de poids 2. Par construction de $\mathcal{T}$, la représentation

$$\mathcal{T}_\mathcal{P}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}/\mathcal{P}\mathcal{T}_\mathcal{P}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$$

est isomorphe à une sous-représentation provenant du module de Tate d'une courbe de Shimura. D'après la proposition 1.3.1, le groupe

$$H^0(<\mathrm{Fr}(\lambda)>, \mathcal{T}_\mathcal{P}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}/\mathcal{P}\mathcal{T}_\mathcal{P}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>})$$

est nul. D'après le lemme de Nakayama, le $R_\mathcal{P}$-module $\mathcal{T}_\mathcal{P}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$ est nul et il en est donc de même pour $\mathcal{T}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$ par densité des points arithmétiques de poids 2.

De la même façon :

$$H^1(K_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})/H^1_{nr}(K_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}(-1)^{<\mathrm{Fr}(\lambda)>}$$

En identifiant R_{Iw} avec $R[[X_1, \cdots, X_d]]$, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}} \xrightarrow{X_d} \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}/X_d \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}) &\xrightarrow{X_d} H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}) \\ &\longrightarrow H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}/X_d) \end{aligned}$$

Donc une injection de

$$H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})/X_d H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})$$

dans :

$$H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R[[X_1, \cdots, X_{d-1}]])$$

D'après le lemme de Nakayama, il suffit donc de démontrer que

$$H^0(<\mathrm{Fr}(w)>, \mathcal{T}(-1) \otimes_R R[[X_1, \cdots, X_{d-1}]])$$

est nul. Par induction descendante, le quotient

$$H^1(K_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})/H^1_{nr}(K_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

est donc nul. □

Nous remarquons également que si $R[[\Gamma_d]]$ est régulier et si d est supérieur à 2, la suite spectrale du théorème 8.5.6 de [Nek06] montre que $H^1(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ est sans torsion.

Conditions globales pour $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$

Soit v une place de F divisant (p) et $I_v \subset G_{F_v}$ ses groupes d'inertie et de décomposition vus comme sous-groupes de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Pour T un $R[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module, nous entendons par T_v le module T muni de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ restreinte à G_{F_v}. D'après [Wil88] théorème 2.2.1 et 2.2.2, il existe une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{W})_v^+ \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{W})_v \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{W})_v^- \longrightarrow 0$$

Le $R[F_{F,v}]$-module $\mathcal{D}(\mathcal{W})_v^-$ est non-ramifié et $\mathrm{Fr}(v)_{arith}$ agit sur lui par le caractère λ^{-1} :

$$\begin{array}{rccl} \lambda^{-1} : & G_{F_v} & \longrightarrow & R^\times \\ & \mathrm{Fr}(v)_{arith} & \longmapsto & \lambda(T(v)) \end{array}$$

La représentation $\mathcal{W}_v$ s'inscrit donc dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_v^+ \longrightarrow \mathcal{W}_v \longrightarrow \mathcal{W}_v^- \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{W}_v^+$ est un module libre de rang 1 non-ramifié sur lequel $\mathrm{Fr}(v)$ agit par $\lambda(v)$.

En tensorisant par $\chi_\Gamma^{-1/2}\chi^{-1}$, nous obtenons une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_v^+ \longrightarrow \mathcal{T}_v \longrightarrow \mathcal{T}_v^- \longrightarrow 0 \tag{2.2.2.1}$$

Le module $\mathcal{T}_v^+$ vérifie alors :

$$\mathcal{T}_v^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}_v^-, R)(1)$$

De plus, le module $\mathcal{T}_v^+$ est uniquement déterminé par ces propriétés. Reprenons les notations de la sous-section 1.5.2, et tout particulièrement des assertions (1.5.2.4) et (1.5.2.5) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_s \mathcal{T} &= \mathrm{Ind}_{H_s}^G \mathcal{T} \\ (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^+ &= \varprojlim_s \mathrm{Ind}_s(\mathcal{T}_v^+) \end{aligned} \tag{2.2.2.2}$$

Nous considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^+ \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^- \longrightarrow 0 \tag{2.2.2.3}$$

Le module $\mathcal{T}_v^+$ vérifie alors :

$$(\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R_{\mathrm{Iw}}}((\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^-, R_{\mathrm{Iw}})(1)$$

Pour L une extension finie de K, soit (Gr, Σ) la condition globale définie par les conditions locales suivantes. Soit $v \in \Sigma$ ne divisant pas (p). Alors :

$$H^1_{Gr}(L_v, \mathcal{T}) = H^1_{nr}(L_v, \mathcal{T})$$

Soit $v \in \Sigma$ divisant (p). Alors :

$$H^1_{Gr}(L_v, \mathcal{T}) = H^1(L_v, \mathcal{T}_v^+) = \ker(H^1(L_v, \mathcal{T}) \longrightarrow H^1(L_v, \mathcal{T}_v^-))$$

Autrement dit, une classe de cohomologie globale c est dans $H^1_{Gr}(L, \mathcal{T})$ si et seulement si c est non-ramifiée en dehors de (p) et vérifie la condition locale de Greenberg relative à $\mathcal{T}^+$ introduite en (2.2.1.3) en $v|(p)$. Le groupe $H^1_{Gr}(L, T)$ est indépendant du choix de Σ pourvu que (Gr, Σ) soit une donnée possible de condition globale.

Soit maintenant $\mathcal{T}$ vu comme un complexe de $R[G_{K,S}]$-modules. Soit L une extension finie de K non-ramifiée en dehors de S. Soit U^+ la condition locale au sens de la sous-section 2.2.1 donnée par les conditions locales suivantes. Soit w une place de L au-dessus de $v \in S$ ne divisant pas (p).

$$U_w^+(\mathcal{T}) = C^\bullet(G_w/I_w, \mathcal{T}^{I_v})$$

Soit $w|(p)$. Alors :

$$U_w^+(\mathcal{T}) = C^\bullet(G_w, \mathcal{T}_v^+)$$

Soit $\tilde{C}_f^\bullet(G_{K,S}, \mathcal{T})$ le complexe de Selmer correspondant.

Proposition 2.2.11. *La cohomologie du complexe de Selmer $\tilde{C}_f^\bullet(G_{K,S},\mathcal{T})$ s'inscrit dans la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{v|p}\bigoplus_{w|v} H^0(G_w,\mathcal{T}_v^-) \longrightarrow \tilde{H}_f^1(G_{K,S},\mathcal{T}) \longrightarrow H^1_{Gr}(K,\mathcal{T}) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.2.4)$$

Démonstration. D'après la suite exacte longue 2.2.1.8 appliquée à notre contexte, la cohomologie de $\tilde{C}_f^\bullet$ s'inscrit dans la suite exacte longue suivante :

$$H^0(G_{K,S},\mathcal{T}) \longrightarrow \bigoplus_{v|p}\bigoplus_{w|v} H^0(G_w,\mathcal{T}_v^-) \longrightarrow \tilde{H}_f^1(G_{K,S},\mathcal{T}) \longrightarrow H^1(G_{K,S},\mathcal{T})$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{v|p}\bigoplus_{w|v} H^1(G_w,\mathcal{T}_v^-) \longrightarrow \cdots$$

Par définition, $H^1_{Gr}(K,\mathcal{T})$ est le noyau de

$$H^1(G_{K,S},\mathcal{T}) \longrightarrow \bigoplus_{v|p}\bigoplus_{w|v} H^1(G_v,U_v^-(\mathcal{T}))$$

donc est l'image de $\tilde{H}_f^1(G_{K,S},\mathcal{T})$ dans $H^1(G_{K,S},\mathcal{T})$. De plus, $H^0(G_{K,S},\mathcal{T})$ est nul. Ceci nous donne la proposition annoncée. $\square$

Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de poids 2 et $f_{\mathcal{P}}$ l'unique forme propre ordinaire p-stabilisée lui correspondant. Soit :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$$

La représentation $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ est isomorphe à un twist de $V(f_{\mathcal{P}})$.

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} V(f_{\mathcal{P}})(1) \otimes (\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2} \bmod \mathcal{P})$$

Pour v divisant (p), la représentation $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ s'inscrit dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{P}}^+ \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{P}}^- \longrightarrow 0 \qquad (2.2.2.5)$$

De plus, l'action de G_{F_v} sur $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}^+$ est donnée par $\lambda_{f_{\mathcal{P}}}(v)(\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2} \bmod \mathcal{P})$. Pour L une extension finie de K, soit (Gr,Σ) la condition globale définie par les conditions locales suivantes. Soit $v \in \Sigma$ ne divisant pas (p). Alors $H^1(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}})$ est nul d'après la proposition 2.2.9 donc il en est de même pour tout sous-groupe de cohomologie. Soit $v \in \Sigma$ divisant (p). Alors :

$$H^1_{Gr}(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}}) = \ker(H^1(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}}) \longrightarrow H^1(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}}^-))$$

Soit (f,Σ) la condition de Bloch-Kato définie par les conditions locales suivantes. Soit $v \in \Sigma$ ne divisant pas (p). Alors :

$$H^1_f(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}}) = H^1_{nr}(L_v,\mathcal{V}_{\mathcal{P}})$$

Soit $v \in \Sigma$ divisant (p). Alors :

$$H^1_f(L_v, \mathcal{V}_\mathcal{P}) = \ker(H^1(L_v, \mathcal{V}_\mathcal{P}) \longrightarrow H^1(L_v, \mathcal{V}_\mathcal{P} \otimes B_{\mathrm{cris}})$$

Autrement dit, une classe de cohomologie globale c est dans $H^1_f(L, \mathcal{T})$ si et seulement si c est non-ramifiée en dehors de (p) et vérifie la condition locale de Bloch-Kato introduite en (2.2.1.4) en $v|(p)$. Le groupe $H^1_{Gr}(L, T)$ est indépendant du choix de Σ pourvu que (Gr, Σ) soit une donnée possible de condition globale.

Proposition 2.2.12. *Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de poids 2 et $f_\mathcal{P}$ la forme propre ordinaire p-stabilisée lui correspondant. Soit :*

$$\mathcal{V}_\mathcal{P} = \mathcal{T}_\mathcal{P}/\mathcal{P}\mathcal{T}_\mathcal{P}$$

La suite courte suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{v|p} \bigoplus_{w|v} H^0(G_w, \mathcal{V}^-_\mathcal{P}) \longrightarrow \tilde{H}^1_f(G_{K,S}, \mathcal{V}_\mathcal{P}) \longrightarrow H^1_f(K, \mathcal{V}_\mathcal{P}) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.2.6)$$

En particulier, $H^1_{Gr}(K, \mathcal{V}_\mathcal{P})$ est égal à $H^1_f(K, \mathcal{V}_\mathcal{P})$.

Démonstration. La première assertion est la proposition 12.5.9.2 de [Nek06]. La seconde vient de la comparaison de la suite exacte (2.2.2.4) spécialisée en $\mathcal{P}$ et de la suite exacte (2.2.2.6). $\square$

Les suites exactes (2.2.2.4) et (2.2.2.6) mettent en évidence l'importance du groupe :

$$\bigoplus_{w|v} H^0(G_w, \mathcal{V}^-_\mathcal{P})$$

Nous disons qu'un point arithmétique $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ est exceptionnel lorsqu'il existe une extension finie L de K, une place v divisant (p) de F et une place w divisant (p) de L telles que :

$$H^0(L_w, \mathcal{V}^-_\mathcal{P}) \neq 0 \qquad (2.2.2.7)$$

Si $\mathcal{P}$ n'est pas exceptionnel, les trois groupes de cohomologie $\tilde{H}^1_f(L, \mathcal{V}_\mathcal{P})$, $H^1_{Gr}(L, \mathcal{V}_\mathcal{P})$ et $H^1_f(L, \mathcal{V}_\mathcal{P})$ sont donc égaux pour toute extension finie L de K.

Lemme 2.2.13. *Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique et $f_\mathcal{P}$ la forme ordinaire propre p-stabilisée qui lui est associée. Si le poids $k(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ n'est pas 2, alors $\mathcal{P}$ n'est pas exceptionnel. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, elles le sont toutes et le point arithmétique $\mathcal{P}$ n'est pas exceptionnel.*

1. *La représentation $V(f_\mathcal{P})_v$ est potentiellement cristalline.*
2. *L'ordre en v du niveau de $f_\mathcal{P}$ n'est pas exactement 1.*
3. *La représentation automorphe $\pi(f_\mathcal{P})_v$ est une série principale.*

Démonstration. Il s'agit du lemme 12.5.4 de [Nek06]. □

Proposition 2.2.14. *Soit v une place de F divisant (p) et L_w une extension de F_v dont la sous-extension non-ramifiée maximale est finie. Alors :*

$$H^0(L_w, \mathcal{T}_v^-) = 0 \tag{2.2.2.8}$$

A plus forte raison $H^0(L_w, \mathcal{V}_v^-)$, $H^0(K_w, (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^-)$ et $H^0(K_w, (\mathcal{V}_{\mathrm{Iw}})_v^-)$ sont nuls. Le R-module $H^0(L_w, \mathcal{A}_v^-)$ est annihilé par un élément non-nul de R. Pour tout $n \in SK$, la limite inverse prise selon la corestriction

$$\varprojlim_t H^0(K(np^t)_w, \mathcal{A}_v^-)$$

des R-modules $H^0(K(np^t)_w, \mathcal{A}_v^-)$ est nul.

Démonstration. La preuve suivante est une utilisation dans notre contexte des idées et techniques de [How07], tout particulièrement le lemme 2.4.4 et la proposition 2.4.5. Soit L_w une extension de F_v dont la sous-extension non-ramifiée maximale M est finie. Soit $\mathcal{P}$ un point arithmétique de poids 2 non exceptionnel. D'après (2.2.2.5), l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ sur $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}^-$ est donnée par le caractère :

$$\psi_{\mathcal{P}} = \lambda_{f_{\mathcal{P}}}^{-1}(\chi\chi_\Gamma^{1/2} \bmod \mathcal{P})$$

Par définition d'un point arithmétique non-exceptionnel, pour toute extension finie N de M :

$$H^0(N, \mathcal{V}_{\mathcal{P}}^-) = 0$$

Donc $\psi_{\mathcal{P}}$ est non-trivial sur $\mathrm{Gal}(\bar{N}/N)$ pour toute extension finie N de M. En particulier, il est d'ordre infini. Le caractère $(\chi\chi_\Gamma^{1/2} \bmod \mathcal{P})$ étant d'ordre fini, le caractère $\lambda_{f_{\mathcal{P}}}$ est d'ordre infini et en particulier d'ordre infini sur $\mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$. Le groupe $\mathrm{Gal}(M/L_w)$ est fini donc $\lambda_{f_{\mathcal{P}}}$ est d'ordre infini sur $\mathrm{Gal}(\bar{L}_w/L_w)$. Donc $\psi_{\mathcal{P}}$ est non-trivial sur $\mathrm{Gal}(\bar{L}_w/L_w)$. Donc :

$$H^0(L_w, \mathcal{V}_{\mathcal{P}}^-) = 0$$

A plus forte raison, le caractère donnant l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{L}_w/L_w)$ sur $\mathcal{T}_v^-$ est non-trivial donc :

$$H^0(L_w, \mathcal{T}_v^-) = 0$$

La suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^0(L_w, \mathcal{T}_v^-) \longrightarrow H^0(L_w, \mathcal{V}_v^-) \longrightarrow H^0(L_w, \mathcal{A}_v^-) \longrightarrow H^1(L_w, \mathcal{T}_v^-)$$

tensorisée par $\mathrm{Frac}(R)$ montre que $H^0(L_w, \mathcal{V}_v^-)$ est nul. Le groupe $H^0(L_w, \mathcal{A}_v^-)$ s'injecte donc dans $H^1(L_w, \mathcal{T}_v^-)$ qui est de type fini sur R d'après la proposition 2.2.2.

En identifiant R_{Iw} avec $R[[X_1, \cdots, X_d]]$, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}} \xrightarrow{X_d} \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}/X_d \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}) \xrightarrow{X_d} H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}) \\ \longrightarrow H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}}/X_d) \end{aligned}$$

Donc une injection de

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})/X_d H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})$$

dans :

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R[[X_1, \cdots, X_{d-1}]])$$

D'après le lemme de Nakayama, il suffit donc pour démontrer que

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})$$

est nul de démontrer que

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R[[X_1, \cdots, X_{d-1}]])$$

est nul. Par induction descendante, le problème se réduit donc au cas où d est nul et donc à la première partie de la preuve. Donc $H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R R_{\mathrm{Iw}})$ est nul et en tensorisant avec $\mathrm{Frac}(R_{\mathrm{Iw}})$, ceci montre que

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R \mathrm{Frac}(R_{\mathrm{Iw}}))$$

est nul et donc que

$$H^0(K_w, \mathcal{T}_v^- \otimes_R \mathrm{Frac}(R_{\mathrm{Iw}})/R_{\mathrm{Iw}})$$

est de type fini sur R_{Iw}.

Le caractère ψ donnant l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{L}_w/L_w)$ sur $\mathcal{A}_v^-$ est défini par :

$$\psi = \lambda^{-1}\chi_\Gamma^{1/2}\chi$$

Nous le considérons comme un caractère de

$$L_w^\times = \mathcal{O}_{L,w}^\times \times \varpi_w^{\widehat{\mathbb{Z}}}$$

via l'application de réciprocité locale. Nous rappelons que χ est d'ordre fini et que λ est d'ordre infini sur $\mathrm{Gal}(\bar{L}_w/L_w)$ d'après la première partie de la preuve. Soit a un élément de la partie libre de $\mathcal{O}_{K,w}^\times$ qui ne soit pas trivial vu comme élément de $\mathrm{Gal}(F[\infty]/F)$. Le caractère λ est trivial en a. Quitte à prendre une puissance de a assez grande, nous pouvons supposer que :

$$\psi(a) - 1 = \chi_\Gamma^{1/2}(a) - 1 = (1+X)^{p^{m'}} - 1$$

Le R-module $H^0(L_w, \mathcal{A}_v^-)$ est donc annihilé par un élément non-nul de R.

Soit $n \in SK$. La $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F n'est pas contenue dans $K(np^\infty)$ donc le caractère ψ n'est trivial sur $\mathrm{Gal}(\bar{K}_w/K(np^\infty)_w)$ pour aucun n. Il existe donc σ dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}_w/K(np^\infty)_w)$ tel que $\psi(\sigma)$ soit non-trivial. Donc :

$$H^0(K(np^\infty)_w, \mathcal{A}_v^-) \hookrightarrow R/(\psi(\sigma) - 1)$$

Le module $H^0(K(np^\infty)_w, \mathcal{A}_v^-)$ est en particulier noethérien et de type fini en tant que R-module. La suite des $H^0(K(np^t)_w, \mathcal{A}_v^-)$ stabilise donc à partir d'un certain rang et la corestriction devient alors la multiplication par $[K(np^{t+1})_w : K(np^t)_w]$. La limite inverse

$$\varprojlim_t H^0(K(np^t)_w, \mathcal{A}_v^-)$$

est donc un sous-module p-divisible de type fini sur R. Ceci montre que :

$$H^0(K(np^\infty)_w, \mathcal{A}_v^-)$$

est nul. □

2.2.3 Systèmes de Kolyvagin

Soit à nouveau SK_1 l'ensemble des premiers de Kolyvagin de la définition 1.5.15 et les idéaux I_n de la définition 1.5.22. Pour $l \in SK$, nous notons λ l'unique place de K au-dessus de l. Le corps résiduel $k(\lambda)$ de K_λ est une extension quadratique de $k(l)$ donc $(N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)$ divise $|k(\lambda)^\times|$.

Soit $\mathbf{Sp}$ un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres à valeurs dans un anneau de valuation discrète S plat et fini sur $\mathcal{O}$

$$\mathbf{Sp} : \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow S$$

de conoyau fini. Soit :

$$T = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}, \mathbf{Sp}} S$$

Le module T est donc un $S[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$-module, libre de rang 2 sur S.

Pour $n \in SK_r$ et $l \in SK_1$ divisant n, le morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}(l)$ a pour polynôme caractéristique X^2-1 sur T/I_nT donc $\mathrm{Fr}(\lambda)$ agit trivialement sur T/I_nT. De plus, l'idéal I_l annule T/I_nT donc $N_{F/\mathbb{Q}}l+1$ annule T/I_nT donc $|k(\lambda)^\times|$ annule T/I_nT. La représentation T/I_nT vérifie donc les hypothèses du lemme 2.2.5. Il existe donc un isomorphisme :

$$\phi_l^{fs} : H^1_{nr}(K_\lambda, T) \xrightarrow{\sim} H^1_s(K_\lambda, T) \otimes G_l$$

D'après le lemme 1.5.11, la place λ décompose totalement dans $K(1)$ et est totalement modérément ramifiée dans $K(n)$. Soit L la p-sous-extension maximale de $K(n)_\lambda/K_\lambda$. Par construction, L est une p-extension abélienne maximale totalement modérément ramifiée et nous associons à L la condition locale transverse.

Soit (f,Σ) une condition globale sur T. Nous supposons que $SK_1 \cap \Sigma$ est vide. Soit $(f(n),\Sigma)$ et $(f(nl),\Sigma)$ les conditions modifiées comme en 2.2.1.6. Ces conditions induisent des conditions globales et locales sur tous les sous-quotients de T. Nous considérons les applications

$$\mathrm{loc}_\lambda : H^1_{f(n)}(K, T/I_nT) \longrightarrow H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_nT)$$

et :

$$\mathrm{loc}_\lambda : H^1_{f(nl)}(K, T/I_{nl}T) \longrightarrow H^1_{tr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \xrightarrow{\sim} H^1_s(K_\lambda, T/I_{nl}T)$$

Nous résumons nos connaissances dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & H^1_{f(n)}(K, T/I_nT) \otimes G_n \arrow[d, "\mathrm{loc}_\lambda"] \\ & & H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_n \arrow[d, "\phi_l^{fs}\otimes 1", "\sim"'] \\ H^1_{f(nl)}(K, T/I_{nl}T) \otimes G_{nl} \arrow[r, "\mathrm{loc}_\lambda"] & H^1_{tr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_{nl} \arrow[r, "\sim"] & H^1_s(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_{nl} \end{tikzcd} \tag{2.2.3.1}$$

Nous remarquons en particulier qu'il est inutile de spécifier la condition cohomologique globale pour énoncer ou vérifier la condition de compatibilité (2.2.3.3) puisque les premiers de Kolyvagin sont par définition en dehors de Σ, si bien que la condition f en l est automatiquement la condition non-ramifiée ou la condition transverse.

Définition 2.2.15. *Un système de Kolyvagin pour T est la donnée d'une famille de classes $(\kappa(n))_{n\in SK}$ telle que*

$$\forall\ n \in SK,\ \ \kappa(n) \in H^1_{f(n)}(K, T/I_nT) \otimes G(n) \tag{2.2.3.2}$$

et telle que

$$\forall\ (n, nl) \in SK_r \times SK_{r+1},\ \ \mathrm{loc}_\lambda\, \kappa(nl) = \phi_l^{fs}(\mathrm{loc}_\lambda\, \kappa(n)) \tag{2.2.3.3}$$

Soit $(\alpha_l)_{l\in SK_1}$ une famille d'isomorphismes :

$$\alpha_l : T/I_lT \xrightarrow{\sim} T/I_lT$$

La famille $(\alpha_l)_{l\in SK_1}$ induit une famille d'isomorphismes

$$\phi_l^{fs}(\alpha_l) : H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_n \xrightarrow{\sim} H^1_s(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_{nl}$$

par les isomorphismes

$$H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \xrightarrow{\sim} T/I_{nl}T \xrightarrow{\alpha_l} T/I_{nl}T \xrightarrow{\sim} H^1_s(K_\lambda, T/I_{nl}T)$$

ainsi qu'une famille d'isomorphismes $(\alpha_n)_{n\in SK}$

$$\alpha_n : H^1(K,T/I_nT) \overset{\sim}{\longrightarrow} H^1(K,T/I_nT)$$

définie par :

$$\alpha_n = \prod_{l|n} \alpha_l$$

Si α_l est l'identité pour $l \in SK_1$ donné, l'isomorphisme

$$\phi_l^{fs}(\alpha_l) : H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \overset{\sim}{\longrightarrow} H^1_s(K_\lambda, T/I_{nl}T)$$

est simplement ϕ_l^{fs}. Soit une famille de classes $(\kappa_n)_{n\in SK}$ telle que

$$\forall\ n \in SK,\ \kappa_n \in H^1_{f(n)}(K,T/I_nT) \otimes G(n)$$

et telle que

$$\forall\ (n,nl) \in SK_r \times SK_{r+1},\ \operatorname{loc}_\lambda \kappa_{nl} = \phi_l^{fs}(\alpha_l)(\operatorname{loc}_\lambda \kappa_n)$$

Nous appelons une telle famille un α_n-système de Kolyvagin. Un tel objet ne mérite pas une définition car si $(\kappa(n))_{n\in SK}$ est un α_n-système de Kolyvagin, la famille $(\alpha_n^{-1}(\kappa_n))_{n\in SK}$ vérifie

$$\forall\ (n,nl) \in SK_r \times SK_{r+1},\ \operatorname{loc}_\lambda \alpha_{nl}^{-1}(\kappa_{nl}) = \phi_l^{fs}(\operatorname{loc}_\lambda \alpha_n^{-1}(\kappa_n))$$

donc est un système de Kolyvagin.

Localisation des classes $\varkappa$

Nous reprenons les techniques de [How07] proposition 2.4.5.

Lemme 2.2.16. *Soit M un R-module de type fini et $m \in M$. Supposons qu'il existe une infinité d'idéaux premiers arithmétiques $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}^{arith}(R)$ tels que m appartienne à $\mathcal{P}M_\mathcal{P}$. Alors m est de torsion.*

Démonstration. Il s'agit du lemme 2.1.7 de [How07]. Soit m appartenant à M tel que m appartienne à $\mathcal{P}M_\mathcal{P}$ pour tout $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}^{arith}(R)$. Soit $I \subset R$ l'image de l'application :

$$\begin{array}{rlll} ev_m : & \operatorname{Hom}_R(<m>_R, R) & \longrightarrow & R \\ & f & \longmapsto & f(m) \end{array}$$

Soit $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique. Alors $f(m)$ appartient à $\mathcal{P}R_\mathcal{P}$ pour tout f donc $I \subset \mathcal{P}R_\mathcal{P}$. Donc $(R/I)_\mathcal{P}$ se surjecte sur $R_\mathcal{P}/\mathcal{P}R_\mathcal{P}$ et est en particulier non-nul. Donc $\mathcal{P}$ est dans le support de R/I. Cela est vrai pour tout $\mathcal{P}$ de codimension 1 donc I est nul. Le seul R-morphisme de $<m>_R$ dans R est donc nul. Donc m est de torsion. □

Lemme 2.2.17. *Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(R)$ un point arithmétique de poids 2 et :*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$$

Soit $n \in SK$, t un entier positif et v une place finie de $K(np^t)$. La classe $z(np^t)_{\mathcal{P}}$ localisée en v appartient à $H^1_{Gr}(K(np^t)_v, \mathcal{V}_{\mathcal{P}})$.

Démonstration. Soit v une place finie de $K(np^t)$. Soit $v \nmid (p)$. D'après la proposition 2.2.9 :

$$H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}_{\mathcal{P}}) = 0$$

Donc $z(np^t)_{\mathcal{P},v}$ appartient à $H^1_{Gr}(K(np^t)_v, \mathcal{V}_{\mathcal{P}})$.

Soit maintenant $v|(p)$. Soit $f_{\mathcal{P}}$ la forme propre ordinaire p-stabilisée correspondant à $\mathcal{P}$. D'après les propriétés d'interpolation de $\mathcal{T}$, la représentation $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ est isomorphe à un twist de $V(f_{\mathcal{P}})$.

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} V(f_{\mathcal{P}})(1) \otimes (\chi^{-1}\chi_{\Gamma}^{-1/2} \bmod \mathcal{P})$$

Nous rappelons que χ est une racine carrée fixée de ω_{tame}. Le caractère χ factorise à travers une extension finie de K. Le caractère $\chi_{\Gamma}^{-1/2} \bmod \mathcal{P}$ factorise à travers $K(np^t, s)$ pour s assez grand. Il existe donc une extension L finie telle que :

$$H^1(L, \mathcal{V}_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} H^1(L, V(f_{\mathcal{P}})(1))$$

Pour w une place de L divisant v, la classe $z(np^t)_{\mathcal{P},v}$ considérée comme élément de $H^1(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(1))$ est dans l'image de l'application d'Abel-Jacobi p-adique. D'après [BK90], elle appartient donc au groupe $H^1_f(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(1))$ de Bloch-Kato pour $w|v$. Or, d'après 2.2.12 :

$$H^1_f(L_w, V(f_{\mathcal{P}})) = H^1_{Gr}(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(1))$$

Donc $z(np^t)_{\mathcal{P},v}$ appartient à $H^1_{Gr}(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(1))$. La suite d'inflation-restriction relative aux groupes de Galois absolus de L_w et $K(np^t)$ s'écrit :

$$0 \longrightarrow H^1(L_w/K(np^t)_v, H^0(L_w, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}})) \longrightarrow H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}}) \longrightarrow H^1(L_w, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}})$$

La cohomologie d'un groupe fini à valeur dans un espace vectoriel sur un corps de caractéristique nulle est triviale donc le premier terme de cette suite est nul. La classe $z(np^t)_{\mathcal{P},v}$ appartient à $H^1_{Gr}(L_w, V(f_{\mathcal{P}})(1))$ donc son image est nulle dans $H^1(L_w, V(f_{\mathcal{P}})^-(1))$. Les groupes de cohomologie $H^1(L_w, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}})$ et $H^1(L_w, V(f_{\mathcal{P}})^-(1))$ sont égaux donc l'image de $z(np^t)_v$ dans $H^1(L_w, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}})$ est nulle. Donc la classe $z(np^t)_v$ est déjà nulle dans $H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}^-_{\mathcal{P}})$. Finalement :

$$z(np^t)_{\mathcal{P}} \in H^1_{Gr}(K(np^t), \mathcal{V}_{\mathcal{P}})$$

□

Nous considérons la condition globale (f, Σ) suivante sur $\mathcal{T}/I_n\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ pour n appartenant à SK. En $\lambda|(p)$:

$$H^1_f(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) = \mathrm{im}(H^1_{Gr}(K_\lambda, \mathcal{T}) \longrightarrow H^1(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}))$$

En $\lambda \nmid (p)$:

$$H^1_f(K_v, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) = H^1_{nr}(K_v, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$$

Proposition 2.2.18. *Supposons que toutes les places v de F divisant l'idéal $\mathcal{N}$ se décomposent dans K/F. Soit $n \in SK$. Alors $z(n)$ appartient à $H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T})$. Soit λ une place de K ne divisant pas (p). Alors la localisation en λ de $\kappa(n)$ vérifie :*

$$\kappa(n)_\lambda \in H^1_{f(n)}(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \otimes G_n$$

Démonstration. Dans cette preuve, nous supposons qu'un choix de générateur de G_n a été effectué et omettons donc ce groupe. Nous suivons toujours [How07] proposition 2.4.5.

Soit λ ne divise pas $\mathcal{N}(p)n$. D'après la preuve du corollaire 2.2.10 :

$$H^1(K(n)_\lambda, \mathcal{T}) = H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T})$$

La classe $z(n) \in H^1(K(n), \mathcal{T})$ vérifie donc :

$$z(n)_\lambda \in H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T})$$

Le $R[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)]$-module $\mathcal{T}$ est non-ramifié en λ et la condition locale non-ramifiée est égale à sa propagation aux quotients dans la catégorie des modules non-ramifiés d'après le lemme 2.2.4 donc $\kappa(n)_\lambda$ appartient à $H^1_{nr}(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$.

Soit $\lambda|n$. Alors λ est l'unique place de K au-dessus de $l \in SK_1$. De plus, $\lambda \nmid \mathcal{N}(p)$ donc $z(n)_\lambda$ appartient à $H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T})$. Après réduction modulo I_n et d'après le lemme 2.2.5 :

$$H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w|\lambda} H^1_{nr}(K(n)_w, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w|\lambda} \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}$$

Un élément σ de G_n agit sur $H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$ en échangeant les termes de la somme directe

$$\bigoplus_{w|\lambda} \mathcal{T}/I_n\mathcal{T}$$

Soit v une place de $K(n/l)$ au-dessus de λ. La place v ramifie totalement dans $K(n)$ donc il n'y a qu'une seule place w au-dessus de v. Le groupe $G(l)$ fixe $K(n/l)$ donc σ_l est d'action triviale sur $H^1_{nr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$. Donc :

$$D_n z(n)_\lambda = \sum_{i=1}^{|G_l|-1} i\sigma^i z(n)_\lambda = \frac{(|G_l|-1)|G_l|}{2} z(n)_\lambda$$

L'idéal I_n contient par définition le cardinal de G_l donc la classe $D_n z(n)_\lambda$ est nulle dans $H^1(K(1)_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$. Son image inverse par la restriction est donc nulle donc $\kappa(n)_\lambda$ appartient bien à $H^1_{f(n)}(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$.

Soit $\lambda|\mathcal{N}$. La place λ est au-dessus d'une place v de F. D'après l'hypothèse sur v, la place v a un groupe de décomposition infini dans D_∞/K. Soit w une place de $K(n)$ au-dessus de λ. D'après la proposition 2.2.8 appliquée au système projectif de $z(np^t)$ et à l'extension $K(np^\infty)$, la classe $z(n)_w$ est non-ramifiée donc l'image de $z(n)$ dans $H^1(K(n)^{nr}_w, \mathcal{T})$ est nulle. Donc $D_n z(n)$ est d'image nulle dans $H^1(K(n)^{nr}_w, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$. L'extension $K(n)/K$ est non-ramifié en λ donc $\kappa(n)$ appartient à $H^1_f(K_\lambda, \mathcal{T}/I_n\mathcal{T})$.

Soit enfin $\lambda|(p)$. Soit t un entier et v une place de $K(np^t)$ au-dessus de λ. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^-_\mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}^-_\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}^-_\mathcal{P} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue de cohomologie et en particulier une injection :

$$H^1(K(np^t)_v, \mathcal{T}^-_\mathcal{P})/\mathcal{P}H^1(K(np^t)_v, \mathcal{T}^-_\mathcal{P}) \hookrightarrow H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}^-_\mathcal{P})$$

Donc une injection :

$$H^1(K(np^t)_v, \mathcal{T}^-)_\mathcal{P}/\mathcal{P}H^1(K(np^t)_v, \mathcal{T}^-)_\mathcal{P} \hookrightarrow H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}^-_\mathcal{P})$$

La classe $z(np^t)$ est d'image nulle dans $H^1(K(np^t)_v, \mathcal{V}^-_\mathcal{P})$ pour une infinité de $\mathcal{P}$. D'après la proposition 2.2.2 et le lemme 2.2.16, l'image de la classe $z(n)_v$ dans $H^1(K(np^t)_v, \mathcal{T}^-)$ est donc de torsion. Le groupe $H^0(K(np^t)_w, \mathcal{T}^-_v \otimes_R \mathcal{K})$ est nul d'après la proposition 2.2.14 donc :

$$H^1(K(np^t)_w, \mathcal{T}^-_v)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} H^0(K(np^t)_w, \mathcal{T}^-_v \otimes_R \mathcal{K}/R)$$

D'après la proposition 2.2.14, le groupe $H^0(K(np^\infty)_w, \mathcal{T}^-_v \otimes_R \mathcal{K}/R)$ est nul. D'après la proposition 1.5.18, l'image de la classe $z(n)_v$ dans $H^1(K(np^t)_w, \mathcal{T}^-_v)_{\mathrm{tors}}$ appartient à un système projectif formant un élément de $H^0(K(np^\infty)_w, \mathcal{T}^-_v \otimes_R \mathcal{K}/R)$. Donc l'image de $z(np^t)_v$ dans $H^1(K(np^t)_w, \mathcal{T}^-_v)_{\mathrm{tors}}$ est nul. Donc $z(n)$ est dans $H^1_{Gr}(K(n)_\lambda, \mathcal{T})$. □

Proposition 2.2.19. *Supposons que toutes les places v de F divisant l'idéal $\mathcal{N}$ se décomposent dans K/F. Soit $n \in SK$. Alors $\mathfrak{z}(n)$ appartient à $H^1_{Gr}(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$. Soit λ une place de K ne divisant pas (p). Alors la localisation en λ de $\varkappa(n)$ vérifie :*

$$\varkappa(n)_\lambda \in H^1_{f(n)}(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \otimes G_n$$

Démonstration. Dans cette preuve, nous supposons à nouveau qu'un choix de générateur de G_n a été effectué et omettons donc ce groupe. Nous suivons toujours [How07] proposition 2.4.5.

Soit $n \in SK$ et λ une place de K. Si λ ne divise pas (p), la preuve du fait que $\varkappa(n)$ appartient à $H^1_{Gr(n)}(K, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ est en tout point semblable à celle du fait correspondant pour $\kappa(n)$ et $\mathcal{T}$, si bien que nous l'omettons dans cette démonstration.

Soit λ une place de K divisant (p) et v une place de $K(n)$ au-dessus de λ. D'après la propositions 2.2.18, la classe $z(np^t)_w$ appartient à $H^1_{Gr}(K(np^t)_v, \mathcal{T})$. La classe $z(np^t)_w$ provient donc d'une classe de $H^1(K(np^t)_w, \mathcal{T}^+)$. La classe

$$\mathfrak{z}(n) = \varprojlim_s \ \mathrm{Cor}_{K(np^t)/D_s(n)}(T(p)^{dual}_*)^{-t} z(np^t) \in H^1(K(n), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

de la définition 1.5.20 est donc dans l'image de :

$$\varprojlim_s H^1(D_s(n), \mathcal{T}^+) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_s H^1(K(n), \mathcal{T}^+ \otimes_R R[\Gamma_d/\Gamma_d^{p^s}]) \xrightarrow{\sim} H^1(K(n), \mathcal{T}^+_{\mathrm{Iw}})$$

Le premier isomorphisme est le lemme de Shapiro et le deuxième est simplement la définition de $\mathcal{T}^+_{\mathrm{Iw}}$ donnée en (2.2.2.2). Donc $\mathfrak{z}(n)_v$ appartient à $H^1_{Gr}(K(n)_v, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$. $\square$

Compatibilité locale des systèmes de Kolyvagin

Soit **Sp** un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres à valeurs dans un anneau de valuation discrète S plat fini sur $\mathcal{O}$

$$\mathbf{Sp} : \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow S$$

de conoyau fini et de noyau $\mathcal{P}$. Soit $T = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}, \mathbf{Sp}} S$. Soit l un premier de Kolyvagin et $nl \in SK$. D'après le corollaire 2.2.10 :

$$H^1(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) = H^1_{nr}(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

La suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow R_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow R_{\mathrm{Iw}}/\mathcal{P} \longrightarrow 0$$

induit une application en cohomologie :

$$H^1(K_\lambda^{nr}/K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1(K_\lambda^{nr}/K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Donc une application naturelle de cohomologie :

$$H^1(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1(K_\lambda^{nr}/K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Après composition avec le morphisme

$$H^1(K_\lambda^{nr}/K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/\mathcal{P}\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1(K_\lambda^{nr}/K_\lambda, T)$$

venant de

$$0 \longrightarrow R_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow S \longrightarrow S/(R_{\mathrm{Iw}}/\mathcal{P}) \longrightarrow 0$$

nous obtenons donc un morphisme naturel :

$$H^1(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1_{nr}(K_\lambda, T)$$

donc un morphisme naturel

$$H^1(K_\lambda, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}/I_n\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_nT)$$

La classe $\mathbf{Sp}(\varkappa(n))$ localisée en λ appartient donc à $H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_nT)$. En répétant la preuve donnée dans la proposition 2.2.18, nous voyons que la classe $\mathbf{Sp}(\varkappa(nl))$ appartient à $H^1_{tr}(K_\lambda, T/I_nT)$ car c'est une classe dérivée de Kolyvagin.

Il existe un entier M tel que les idéaux I_n et I_{nl} contiennent $\mathfrak{m}_S^M$. Soit π_S un générateur de $\mathfrak{m}_S$. D'après le lemme 1.5.16, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K(nl)/K(n))$ est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K(l)/K(1))$. La proposition 1.5.18 montre donc l'égalité suivante de classes de cohomologie de $H^1(K(n), T)$:

$$\mathrm{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl) = \lambda_{\mathfrak{m}}(l) D_n z(n)$$

Le cocycle

$$\mathrm{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l) D_n z(n) \in Z^1(K(n), T)$$

est donc un cobord. Il existe donc a appartenant à T tel que :

$$\mathrm{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl)(g) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l) D_n z(n)(g) = (g-1)a$$

Pour g égal à $\mathrm{Fr}(\lambda)$, $a(n)$ égal à $D_n z(n)(\mathrm{Fr}(\lambda))$ et $a(nl)$ égal à $D_n z(nl)(\mathrm{Fr}(\lambda))$, l'égalité précédente devient :

$$|G_l| a(nl) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l) a(n) = (\mathrm{Fr}(\lambda) - 1)a$$

Par définition des premiers de Kolyvagin, $|G_l|$ et $\lambda_{\mathfrak{m}}(l)$ appartiennent à $\mathfrak{m}_S^M$ et $\mathrm{Fr}(\lambda) - 1$ annihile $T/\mathfrak{m}^M T$. Le S-module T est sans torsion donc :

$$\frac{|G_l|}{\pi_S^M} a(nl) - \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}(l)}{\pi_S^M} a(n) = \frac{\mathrm{Fr}(\lambda) - 1}{\pi_S^M} a$$

D'après la proposition 1.5.19 :

$$a(nl) = u(1)\,\mathrm{Fr}(l) a(n)$$

D'après (1.4.5.5) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(\lambda) - 1 &= \mathrm{Fr}(l)^2 - 1 \\ &= \lambda_{\mathfrak{m}}(l)\chi^{-1}(\mathrm{Fr}(l))\chi_\Gamma^{-1/2}(\mathrm{Fr}(l))\,\mathrm{Fr}(l) - (N_{F/\mathbb{Q}} l + 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{(N_{F/\mathbb{Q}} l + 1)\,\mathrm{Fr}(l) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l)}{\pi_S^M} a(n) = \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}(l)\chi^{-1}(\mathrm{Fr}(l))\chi_\Gamma^{-1/2}(\mathrm{Fr}(l))\,\mathrm{Fr}(l) - (N_{F/\mathbb{Q}} l + 1)}{\pi_S^M} a$$

D'après les propriétés des premiers de Kolyvagin :

$$\frac{(N_{F/\mathbb{Q}} l + 1)\,\mathrm{Fr}(l) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l)}{\pi_S^M} a(n) = \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}(l)\,\mathrm{Fr}(l) - (N_{F/\mathbb{Q}} l + 1)}{\pi_S^M} a$$

Le terme $\lambda_{\mathfrak{m}}(l)\operatorname{Fr}(l) - (N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)$ appartient à I_{nl} donc le membre de droite de l'égalité précédente ne dépend que de la classe $\bar{a}$ de a dans $T/I_{nl}T$. Finalement :

$$\frac{(N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)\operatorname{Fr}(l) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l)}{\pi_S^M} a(n) = \frac{(N_{F/\mathbb{Q}}l + 1)\operatorname{Fr}(l) - \lambda_{\mathfrak{m}}(l)}{\pi_S^M} \operatorname{Fr}(l)\bar{a} \tag{2.2.3.4}$$

Par ailleurs, la classe de cohomologie

$$\operatorname{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl) \in H^1(K(n), T/I_{nl}T)$$

vérifie :

$$\operatorname{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl) = \lambda_{\mathfrak{m}}(l) D_n z(n) = 0$$

En effet, $\lambda_{\mathfrak{m}}(n)$ appartient à I_{nl}. Le cocyle

$$D_n z(nl) \in Z^1(K(nl), T/I_{nl}T)$$

vérifie donc :

$$\operatorname{Cor}_{K(l)/K(1)} D_n z(nl)(g) = (g-1)a$$

La définition de la dérivée de Kolyvagin montre alors que le cocyle

$$D_{nl} z(nl) \in Z^1(K(nl), T/I_{nl}T)$$

s'étend en un unique cocycle de $Z^1(K(n), T/I_{nl}T)$ vérifiant :

$$D_{nl} z(nl)(\sigma_l) = -\sigma_l \bar{a} \tag{2.2.3.5}$$

Dans (2.2.3.5), l'élément σ_l est un relèvement fixé de $\sigma_l \in G_l$. La représentation $T/I_{nl}T$ est non-ramifiée en l donc :

$$\kappa(nl)_\lambda(\sigma_l) = -\bar{a} \tag{2.2.3.6}$$

Les assertions (2.2.3.4) et (2.2.3.6) donnent :

$$\kappa(n)_\lambda(\operatorname{Fr}(l)) = -\operatorname{Fr}(l)\kappa(nl)_\lambda(\sigma_l)$$

Nous avons prouvé la proposition suivante.

Proposition 2.2.20. *Soit* $\mathbf{Sp}$ *un morphisme de* $\mathcal{O}$*-algèbres à valeurs dans un anneau de valuation discrète* S *plat fini sur* $\mathcal{O}$

$$\mathbf{Sp} : R_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow S$$

de conoyau fini. Soit $T = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R_{\mathrm{Iw}}, \mathbf{Sp}} S$. *Soit* (f, Σ) *une condition globale pour* T. *Soit* $(n, nl) \in SK^2$. *Considérons le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_n \arrow[d, "\phi_l^{fs}\otimes 1", "\sim"'] \\ H^1_{tr}(K_\lambda, T/I_{nl}T) \otimes G_{nl} \arrow[r, "\sim"] & T/I_{nl}T \otimes G_{nl} \end{tikzcd}$$

Alors les images $\mathbf{Sp}(\varkappa(n))$ *et* $\mathbf{Sp}(\varkappa(nl))$ *de* $\varkappa(n)$ *et* $\varkappa(nl)$ *localisées en* λ *sont respectivement dans* $H^1_{nr}(K_\lambda, T/I_nT)$ *et* $H^1_{tr}(K_\lambda, T/I_{nl}T)$. *Nous notons* $\mathbf{Sp}(\varkappa(n))_\lambda$ *et* $\mathbf{Sp}(\varkappa(nl))_\lambda$ *les images de* $\mathbf{Sp}(\varkappa(n))$ *et* $\mathbf{Sp}(\varkappa(nl))$ *dans* $T/I_{nl}T \otimes G_{nl}$. *Alors :*

$$\mathbf{Sp}(\varkappa(n))_\lambda = -\operatorname{Fr}(l)\mathbf{Sp}(\varkappa(nl))_\lambda \tag{2.2.3.7}$$

Bibliographie

[BD98] Massimo Bertolini and Henri Darmon. Heegner points, p-adic L-functions, and the Cerednik-Drinfeld uniformization. *Invent. Math.*, 131(3) :453–491, 1998.

[BD05] M. Bertolini and H. Darmon. Iwasawa's main conjecture for elliptic curves over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions. *Ann. of Math. (2)*, 162(1) :1–64, 2005.

[Beĭ84] A. A. Beĭlinson. Higher regulators and values of L-functions. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 181–238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[BG03] David Burns and Cornelius Greither. On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives. *Invent. Math.*, 153(2) :303–359, 2003.

[BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Buy07] Kazim Buyukboduk. Λ-adic Kolyvagin systems, 2007. Preprint, 56pp., `http ://arxiv.org/abs/0706.0377v1`.

[Car86] Henri Carayol. Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Compositio Math.*, 59(2) :151–230, 1986.

[Car94] Henri Carayol. Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet. In *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, volume 165 of *Contemp. Math.*, pages 213–237. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Cor02] Christophe Cornut. Mazur's conjecture on higher Heegner points. *Invent. Math.*, 148(3) :495–523, 2002.

[CV05] Christophe Cornut and Vinayak Vatsal. CM points and quaternion algebras. *Doc. Math.*, 10 :263–309 (electronic), 2005.

[Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389*, pages 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.

[Del79] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.

[FM95] Jean-Marc Fontaine and Barry Mazur. Geometric Galois representations. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 41–78. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[FPR94] Jean-Marc Fontaine and Bernadette Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 599–706. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Gre89] Ralph Greenberg. Iwasawa theory for p-adic representations. In *Algebraic number theory*, volume 17 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 97–137. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[Gre91] Ralph Greenberg. Iwasawa theory for motives. In *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, volume 153 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 211–233. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[Gro91] Benedict H. Gross. Kolyvagin's work on modular elliptic curves. In *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, volume 153 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 235–256. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[GZ86] Benedict H. Gross and Don B. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Invent. Math.*, 84(2) :225–320, 1986.

[Har67] Robin Hartshorne. *Local cohomology*, volume 1961 of *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Hid86] Haruzo Hida. Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms. *Invent. Math.*, 85(3) :545–613, 1986.

[Hid88] Haruzo Hida. On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields. *Ann. of Math. (2)*, 128(2) :295–384, 1988.

[Hid04] Haruzo Hida. *p-adic automorphic forms on Shimura varieties*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2004.

[Hid06] Haruzo Hida. *Hilbert modular forms and Iwasawa theory*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.

[How04a] Benjamin Howard. The Heegner point Kolyvagin system. *Compos. Math.*, 140(6) :1439–1472, 2004.

[How04b] Benjamin Howard. Iwasawa theory of Heegner points on abelian varieties of GL_2 type. *Duke Math. J.*, 124(1) :1–45, 2004.

[How06a] Benjamin Howard. Bipartite Euler systems. *J. Reine Angew. Math.*, 597 :1–25, 2006.

[How06b] Benjamin Howard. Special cohomology classes for modular Galois representations. *J. Number Theory*, 117(2) :406–438, 2006.

[How07] Benjamin Howard. Variation of Heegner points in Hida families. *Invent. Math.*, 167(1) :91–128, 2007.

[Kat93a] Kazuya Kato. Iwasawa theory and p-adic Hodge theory. *Kodai Math. J.*, 16(1) :1–31, 1993.

[Kat93b] Kazuya Kato. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–163. Springer, Berlin, 1993.

[Kat04] Kazuya Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, (295) :ix, 117–290, 2004. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[Kol90] Viktor Kolyvagin. Euler systems. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 435–483. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Maz89] B. Mazur. Deforming Galois representations. In *Galois groups over* $\mathbf{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, volume 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 385–437. Springer, New York, 1989.

[McC91] William G. McCallum. Kolyvagin's work on Shafarevich-Tate groups. In *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, volume 153 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 295–316. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[Mil05] James Milne. Introduction to Shimura varieties. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 265–378. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[MR04] Barry Mazur and Karl Rubin. Kolyvagin systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 168(799) :viii+96, 2004.

[MW84] B. Mazur and A. Wiles. Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$. *Invent. Math.*, 76(2) :179–330, 1984.

[MW86] B. Mazur and A. Wiles. On p-adic analytic families of Galois representations. *Compositio Math.*, 59(2) :231–264, 1986.

[Nek92] Jan Nekovář. Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties. *Invent. Math.*, 107(1) :99–125, 1992.

[Nek95] Jan Nekovář. On the p-adic height of Heegner cycles. *Math. Ann.*, 302(4) :609–686, 1995.

[Nek00] Jan Nekovář. p-adic Abel-Jacobi maps and p-adic heights. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 24 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 367–379. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[Nek04] Jan Nekovář. The Euler system method for CM points on Shimura curves. In *L-functions and Galois representations (Durham, July 2004)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Nek06] Jan Nekovář. Selmer complexes. *Astérisque*, (310) :559, 2006.

[NP00] Jan Nekovář and Andrew Plater. On the parity of ranks of Selmer groups. *Asian J. Math.*, 4(2) :437–497, 2000.

[NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Nys96] Louise Nyssen. Pseudo-représentations. *Math. Ann.*, 306(2) :257–283, 1996.

[Och05] Tadashi Ochiai. Euler system for Galois deformations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(1) :113–146, 2005.

[Oht95] Masami Ohta. On the p-adic Eichler-Shimura isomorphism for Λ-adic cusp forms. *J. Reine Angew. Math.*, 463 :49–98, 1995.

[Per94] *Périodes p-adiques*. Société Mathématique de France, Paris, 1994. Papers from the seminar held in Bures-sur-Yvette, 1988, Astérisque No. 223 (1994).

[PR87a] Bernadette Perrin-Riou. Fonctions L p-adiques, théorie d'Iwasawa et points de Heegner. *Bull. Soc. Math. France*, 115(4) :399–456, 1987.

[PR87b] Bernadette Perrin-Riou. Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques. *Invent. Math.*, 89(3) :455–510, 1987.

[PR88] Bernadette Perrin-Riou. Fonctions L p-adiques associées à une forme modulaire et à un corps quadratique imaginaire. *J. London Math. Soc. (2)*, 38(1) :1–32, 1988.

[PR95] Bernadette Perrin-Riou. Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques. *Astérisque*, (229) :198, 1995.

[PR98] Bernadette Perrin-Riou. Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(5) :1231–1307, 1998.

[Rub00] Karl Rubin. *Euler Systems.* Princeton University Press, 2000.

[Sai99] Takeshi Saitō. Galois representations in arithmetic geometry. *Sūgaku*, 51(2) :161–174, 1999.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[Vat03] Vinayak Vatsal. Special values of anticyclotomic L-functions. *Duke Math. J.*, 116(2) :219–261, 2003.

[Wes02] Tom Weston. Algebraic cycles, modular forms and Euler systems. *J. Reine Angew. Math.*, 543 :103–145, 2002.

[Wil88] Andrew Wiles. On ordinary λ-adic representations associated to modular forms. *Invent. Math.*, 94(3) :529–573, 1988.

[Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.

[Zha01] Shouwu Zhang. Heights of Heegner points on Shimura curves. *Ann. of Math. (2)*, 153(1) :27–147, 2001.