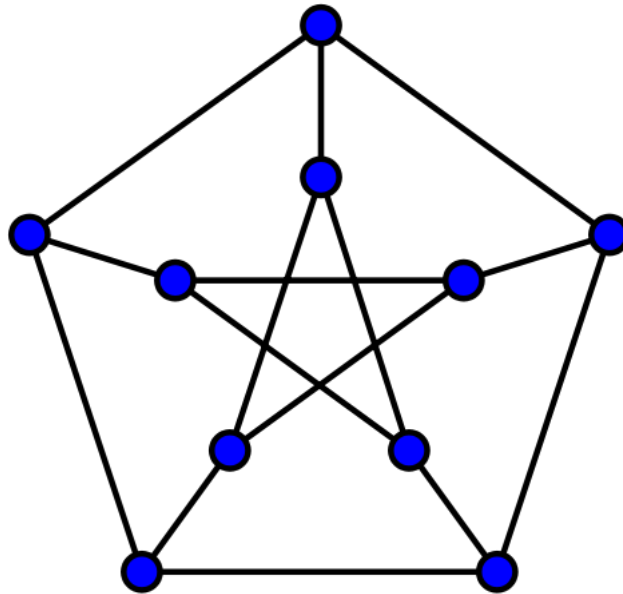


Théorie des graphes : une brève introduction (avec un biais algébrique assumé)

Olivier Fouquet



1 Généralités

*Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes*¹. (Johann Wolfgang von Goethe).

1.1 Notions de base

1.1.1 Définitions

Si E est un ensemble fini, on dénote par $E \times E$ l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times E$ avec $x \neq y$ dans lequel on identifie de plus (x, y) et (y, x) .

Un graphe G est la donnée d'un couple d'ensembles finis $G = (X, E)$ où X est non-vide et $E \subset X \times X$. L'ensemble X est l'ensemble des sommets de G et E est l'ensemble des arêtes de G . Le cardinal de G est le cardinal de X .

Remarque : Notre définition implique que les graphes $G_1 = (\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$ et $G_2 = (\{a, b\}, \{(a, b)\})$ ne sont pas les mêmes, puisqu'ils n'ont pas le même ensemble sous-jacent. Néanmoins, leurs propriétés sont suffisamment proches pour que l'on ait envie de les identifier. Nous reviendrons sur cette subtilité.

Deux sommets $(x, y) \in X^2$ sont dits adjacents dans G , ce que l'on note $x \sim_G y$, si $(x, y) \in E$. En particulier, un sommet n'est jamais adjacent à lui-même. L'ensemble $\{y \in X | (x, y) \in E\}$ est appelé l'ensemble des voisins de x et est noté $N_G(x)$. Le degré $d_G(x)$ de $x \in X$ est le cardinal de $N_G(x)$. Le degré minimal δ_G de G est le minimum des degrés des sommets de G ; le degré maximal Δ_G est le maximum des degrés des sommets de G . Lorsque $\delta_G = \Delta_G = k$, donc lorsque $d_G(x)$ ne dépend pas de x , on dit que G est k -régulier.

Deux arêtes distinctes a et b sont dites incidentes si $a \cap b \neq \emptyset$, et incidentes en u si $a \cap b = \{u\}$. Pour $x \in X$ et $e \in E$, on note $G - \{x\}$ ou $G - x$ le graphe $(X - \{x\}, E - \{(x, y) \in E | y \in X\})$ et $G - \{e\}$ ou $G - e$ le graphe $(X, E - \{e\})$. Si $(x, y) \in X \times X - E$, on note $G \cup \{e\}$ le graphe $(X, E \cup (x, y))$. Pour $G = (X, E)$ et $G' = (X', E')$ deux graphes, on note $G \cup G'$ et on appelle union de G et G' le graphe $(X \cup X', E \cup E')$. Le complémentaire \bar{G} d'un graphe (X, E) est le graphe $(X, X \times X - E)$. On note $G/(x, y)$ le graphe $G = (X - \{x, y\} \cup \{z\}, E \cup \{(z, v) | v \in N_G(x) \cup N_G(y)\})$.

Un sous-graphe $H \subset G$ de $G = (X, E)$ est un graphe $(X(H), E(H))$ avec $X(H) \subset X$ et $E(H) \subset E$. La relation $H \subset G$ est une relation d'ordre partielle. Un sous-graphe H est dit induit si $E(H) = \{(x, y) \in E | (x, y) \in X(H) \times X(H)\}$. Un sous-graphe H est dit couvrant si $X(H) = X$. Un graphe est dit minimal pour une propriété P s'il n'admet pas de sous-graphe strict vérifiant P . Un sous-graphe H de G est dit maximal pour une propriété P s'il n'existe pas de sous-graphe H' de G contenant H et vérifiant P .

¹Les mathématiciens sont un peu comme les Français : lorsque vous leur parlez, ils traduisent tout dans leur langue, si bien que c'est devenu quelque chose de tout à fait différent

Remarque : La relation d'ordre \subset étant partielle, il peut exister plusieurs sous-graphes minimaux ou maximaux pour une propriété.

1.1.2 Chemins, connexité, cycles, arbres

Un chemin P d'un graphe G est un sous-graphe (X, E) tel que $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ avec $x_i \neq x_j$ et $E = \{(x_i, x_{i+1}) | 1 \leq i \leq k - 1\}$. La longueur de P est $k - 1$, donc le cardinal de P moins 1. Un chemin P est déterminé uniquement par $X(P)$ muni de l'ordre donné par l'indexation, et l'on se permettra donc de parler du chemin X . Deux chemins $P_1 = X$ et $P_2 = Y$ sont dits intérieur-disjoints si $X \cap Y = (x_1, x_k) = (y_1, y_{k'})$. Si deux chemins $P_1 = X$ et $P_2 = Y$ ont les mêmes extrémités x et y , il existe un dernier sommet $x_i = y_i$ tel que $x_j = y_j$ pour $j \leq i$. Si $x_i = y$, les chemins P_1 et P_2 sont confondus. Si $x_i \neq y$, il existe un premier sommet $x_j = y_\ell$ avec $i < j$ (et $i < \ell$). Il existe alors dans P_1 et P_2 deux sous-chemins intérieur-disjoints.

Un parcours est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pour tout i . Un parcours est un circuit si $x_1 = x_n$.

Remarque : Bien qu'un chemin n'ait pas d'orientation, on dira que x_1 est le premier sommet et x_k le dernier sommet d'un chemin P .

Un graphe est dit connexe s'il existe un chemin P dont le premier sommet est x et le dernier sommet y pour tout $(x, y) \in X \times X$. Un graphe connexe est aussi l'union de chemins passant par un sommet fixé. En particulier, l'union de deux graphes connexes est un graphe connexe si et seulement si ces deux graphes ont un sommet en commun. Un sous-graphe H d'un graphe G est une composante connexe de G s'il est maximal pour la propriété d'être connexe.

Lemme 1.1. *Un graphe est l'union disjointe de ses composantes connexes. La composante connexe contenant un sommet x est l'union de tous les chemins contenant x .*

Démonstration. Un sommet est un graphe connexe donc est contenu dans une composante connexe. Il suffit donc de démontrer que deux composantes connexes distinctes sont disjointes. Soit C une composante connexe et H un sous-graphe connexe ayant une intersection non-triviale x avec C . L'union de tous les chemins passant par x est un graphe connexe contenant C donc est égal à C par maximalité de C . Cette union contient également H donc H est inclus dans C . Si H est également une composante connexe, il s'ensuit que $C = H$. Si C est un sous-graphe connexe contenant x , il est inclus dans l'union de tous les chemins contenant x donc cette union est la composante connexe contenant x . \square

La distance entre deux sous-ensembles A et B de sommets d'un graphe connexe G , en particulier entre deux sommets, est la longueur de plus court chemin dont l'une des extrémités est dans A et l'autre dans B . Si A et B sont inclus dans des composantes connexes distinctes, on considère que cette distance est infinie.

Lemme 1.2. *Soit Pr une propriété telle que si Pr est vraie pour $x \in X$, alors Pr est vraie pour tout $y \in N_G(x)$. Alors, si Pr est vraie pour x , Pr est vraie pour tout y dans la composante connexe de x .*

Démonstration. Soit y dans la composante connexe de x . Le sommet y appartient à un chemin d'origine x donc il suffit de démontrer le lemme lorsque G est un chemin P d'extrémités $x = x_1$ et $y = x_k$. L'hypothèse que nous avons faite sur Pr entraîne en particulier l'assertion suivante : si Pr est vraie pour x_i , alors Pr est vraie pour x_{i+1} . La propriété Pr est vraie pour x_1 donc pour x_k par récurrence sur le nombre de sommets de P . \square

On dira qu'une propriété est expansive si elle vérifie les hypothèses du lemme précédent.

Lemme 1.3. *Les chemins sont les graphes connexes ayant exactement deux sommets de degré 1 et tous les autres sommets de degré 2 ainsi que le sommet isolé.*

Démonstration. Un chemin P est un sommet isolé ou bien un graphe connexe ayant exactement deux sommets de degré 1 et tous les autres sommets de degré 2. Réciproquement, si G est un graphe ayant exactement deux sommets de degré 1 et tous les autres sommets de degré 2, soit $P = (x_1, \dots, x_n)$ un chemin maximal contenu dans P . Les sommets internes de P sont de degré 2 dans P et de degré 2 dans G donc leurs voisins dans G sont sur P . Tous les voisins dans G de x_n et x_1 sont sur P par maximalité. Tous les voisins dans G des sommets de P sont donc dans P . La propriété d'être dans P est donc expansive. Le graphe G étant connexe, il est donc égal à P . \square

Un cycle est un graphe $C = (X, E)$ tel que X soit un chemin P de longueur au moins 2 et $E = E(P) \cup \{(x_k, x_1)\}$. La longueur d'un cycle est k , donc son cardinal. Si C est un cycle et $(x, y) \in X \times X$, le parcours de C dans un sens ou l'autre réalise C comme l'union de deux chemins intérieur-disjoints. Un cycle est donc connexe. Réciproquement, l'union de deux chemins intérieur-disjoints est un cycle. Un graphe ne contenant pas de cycles est dit acyclique.

Proposition 1.4. *Un graphe G tel que $\delta_G \geq 2$ contient un cycle. Un graphe est une union disjointe de cycles si et seulement s'il est 2-régulier.*

Démonstration. Soit G un graphe tel que $\delta_G \geq 2$. Ce graphe contient un cycle si et seulement si l'une de ses composantes connexes en contient un ; nous supposons donc G connexe sans perte de généralité. Soit $P = (X, E)$ un chemin maximal G ; c'est-à-dire un sous-graphe maximal pour la propriété d'être un chemin. Le dernier sommet de P est de degré au moins 2 donc a au moins un voisin u qui ne soit pas x_{k-1} . Le sous-graphe $(X \cup \{u\}, E \cup \{(x_k, u)\})$ de G contient P , donc n'est pas un chemin par maximalité de P . Donc $u \in X$ et u s'écrit $u = x_i$. Comme $u \neq x_{k-1}$, le voisinage de x_i contient l'ensemble $\{x_{i+1}, x_k\}$ de cardinal 2. Le graphe $(\{x_j | i \leq j \leq k\}, \{(x_j, x_{j+1}) | i \leq j \leq k\} \cup \{(x_k, x_i)\})$ est un cycle.

Une union disjointe de cycles est un graphe 2-régulier. Soit G un graphe 2-régulier et H une de ses composantes connexes. D'après la première partie de la preuve, H contient un cycle $C = (X, E)$. Soit v un sommet de C . Le sommet v a deux voisins dans C et dans G donc $N_G(v) = N_C(v) \subset X$. Les deux voisins de v dans G sont donc dans C . La propriété Pr "appartenir à C " est donc expansive. D'après le lemme 1.2, Pr est donc vraie pour H . Donc $H = C$. \square

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de degré 0 ou 1 d'un arbre sont appelés feuilles. Les sommets qui ne sont pas des feuilles sont appelés sommets intérieurs. D'après la proposition 1.4, un graphe de degré minimal supérieur à 2 contient un cycle donc le degré minimal d'un arbre est au plus 1. Un arbre contient donc des feuilles.

Proposition 1.5. *Soit $T = (X, E)$ un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le graphe T est un arbre.*
2. *Le graphe T est acyclique et $T \cup \{(x, y)\}$ contient un cycle pour tout $(x, y) \notin E$.*
3. *Il existe un unique chemin P de x à y pour tout $(x, y) \in X \times X$.*
4. *Le graphe T est connexe et $T - \{e\}$ n'est pas connexe pour tout $e \in E$.*

Démonstration. Supposons (1). Alors T est acyclique. Soit $(x, y) \notin E$ avec $x \neq y$. Soit P un chemin de x à y dans T . Le graphe $P \cup (x, y)$ est un cycle. Donc (2) est vraie. Supposons (2) et soit $(x, y) \in X \times X$. Le graphe T est acyclique donc contient au plus un chemin entre x et y . Si $x = y$, il y a un unique chemin de x à y dans T . Si $x \neq y$, $T \cup \{(x, y)\}$ contient un cycle C . Le graphe T est acyclique donc C contient l'arête (x, y) . Le sous-graphe $C - \{(x, y)\}$ est alors un chemin de x à y dans T . Donc (3) est vraie. Supposons (3) et soit $e = (u, v) \in E$. Alors e est l'unique chemin de u à v . Donc $T - \{e\}$ n'est pas connexe. Donc (4) est vraie. Enfin, supposons (4). Soit (x, y) deux sommets adjacents. Le graphe $T - (x, y)$ n'est pas connexe donc il n'existe pas de chemin de x à y ne contenant pas (x, y) . Donc x, y ne sont sur aucun cycle. Un graphe contient un cycle seulement s'il a deux sommets adjacents sur un cycle donc T est acyclique. Donc (1) est vraie. \square

Corollaire 1.6. *Soit G un graphe connexe et S un ensemble d'arêtes acyclique. Alors G admet un sous-arbre couvrant contenant l'ensemble S . De plus $|X| - 1 \leq |E|$ avec égalité si et seulement si G est un arbre.*

Démonstration. Soit U l'ensemble des sous-graphes couvrants connexes de G contenant S . Cet ensemble est non-vide donc il contient un élément minimal T pour la relation d'être un sous-graphe. Si $e \in E(T)$, alors $T - \{e\}$ n'est pas connexe par minimalité de T donc T est un arbre d'après la proposition 1.5. Soit G un graphe connexe minimal vérifiant $|X| - 1 > |E|$. Alors G admet un arbre couvrant T vérifiant la même propriété donc $G = T$. Soit u une feuille de G . Le sous-graphe $G - \{u\}$ de G , s'il existe, vérifie $|X| > |E| - 1$ et est connexe, ce qui est impossible par minimalité de G . Donc G est le sommet isolé u . Mais G vérifie alors $|X| - 1 \leq |E|$. C'est absurde. Si G vérifie $|X| = |E| - 1$, alors $G - \{e\}$ n'est pas connexe donc G est un arbre d'après la proposition 1.5. Réciproquement, soit G un arbre minimal vérifiant $|X| > |E| - 1$. Comme précédemment, on montre que G est un sommet isolé et l'on obtient donc une contradiction. \square

On dit que l'on taille un graphe lorsque l'on considère le sous-graphe induit par les sommets de degré au moins 2. La taille de G est notée $t(G)$. On appelle hauteur

de taille d'un sommet x le plus grand entier tel que $x \in t^n(G)$. En particulier, la hauteur de taille de x dans $t(G)$ est égale à la hauteur de taille de x dans G moins 1.

Lemme 1.7. *Soit T un arbre.*

1. *Le graphe $t(T)$ est un arbre. Plus généralement, l'ensemble des sommets de hauteur de taille au moins h est un arbre.*
2. *L'ensemble des sommets de hauteur de taille maximale de T est un sommet x ou une arête (x, y) .*

Démonstration. 1. Soit T privé de ses feuilles est vide, soit il existe des sommets internes x, y dans T . Un chemin de x à y dans T ne passe pas par une feuille donc est un chemin de x à y dans $t(T)$. Donc $t(T)$ est connexe et acyclique. L'ensemble des sommets de hauteur de taille au moins h est l'ensemble des sommets de hauteur de taille au moins 0 de $t^h(T)$ donc est un arbre.

2. Si h est la profondeur de taille maximale de T , alors $t^{h+1}(T)$ est vide, donc $t^h(T)$ n'a que des feuilles. C'est donc un sommet isolé ou une arête.

□

2 Méthodes

Though this be madness, yet there is method in't. (William Shakespeare).

2.1 Maximalité, minimalité

Une technique de démonstration commode lorsque l'on traite de graphes et de considérer les graphes extrémaux pour certaines propriétés et diverses relations d'ordres. On rappelle qu'une relation d'ordre est une relation antisymétrique, réflexive et transitive; qu'une relation d'ordre sur un ensemble S est totale si $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tout $(x, y) \in S^2$ et qu'elle est partielle sinon. On rappelle qu'un élément maximal est un élément z tel que $z \leq x$ implique $x = z$ et qu'un élément maximum est un élément z tel que $x \leq z$ pour tout x . Nous listons ici quelques propriétés qu'il faut garder en mémoire.

2.1.1 Récurrence sur le cardinal de G

On considère les graphes extrémaux pour une certaine propriété et la relation d'ordre (totale) suivante sur \mathbb{N} : $G \leq H$ si et seulement si $|G| \leq |H|$

Exemple : On a utilisé cette méthode pour montrer qu'une propriété expansive était vraie pour tous les sommets d'une composante connexe si elle était vraie pour un des sommets.

2.1.2 Récurrence sur le cardinal de E

On considère les sous-graphes minimaux pour une certaine propriété et pour la relation d'ordre (totale) suivante sur \mathbb{N} : $G \leq H$ si et seulement si $X(G) = X(H)$ et $|E(G)| \leq |E(H)|$.

Exemple : Montrons que tout graphe connexe contient un sous-arbre couvrant. Soit G un arbre connexe. Soit T un sous-graphe connexe minimal pour cette propriété et $|E|$. D'après la proposition 1.5, le graphe T est un arbre.

2.1.3 Maximalité par rapport à une caractérisation du graphe

On considère les graphes maximaux pour une certaine propriété intrinsèque d'un graphe, par exemple être connexe, ou être un chemin, ou être biparti...

Exemples : On est souvent amené à considérer les sous-graphes maximaux pour la propriété d'être un chemin (les plus longs chemins) et en particulier le fait que tous les voisins de x_1 sont dans P . La considération des sous-graphes minimaux pour la propriété d'être un cycle permet souvent de remplacer un cycle par un cycle induit.

Lemme 2.1. *Un circuit eulérien d'un graphe est un circuit passant exactement une fois par chaque arête, c'est-à-dire un multiplète $((x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, x_{n+1}))$ avec*

$x_i \sim_G x_{i+1}$ et $\{(x_i, x_{i+1}) | 1 \leq i \leq n\} = E$. Un parcours eulérien est un multipléte $((x_1, x_2), \dots, (x_n, x_{n+1}))$ tel que $\{(x_i, x_{i+1}) | 1 \leq i \leq n\} \subset E$. Un graphe connexe G admet un circuit eulérien si et seulement si le degré de chaque sommet est pair.

Démonstration. Soit G un graphe admettant un circuit eulérien C . Ce circuit contient chaque sommet de G . Un sommet apparaissant n fois dans C est de degré $2n$, donc pair. Supposons maintenant que G soit un graphe dont le degré de chaque sommet est pair. Considérons un sous-graphe maximal H pour la propriété d'être formé par les sommets et les arêtes d'un parcours eulérien C . Par maximalité, toutes les arêtes du premier sommet x et du dernier sommet y de C appartiennent à $E(H)$. La première (resp. dernière) occurrence de x (resp. y) dans C étant associée à une arête exactement et les occurrences suivantes étant associées à deux arêtes sauf éventuellement la dernière (resp. première), la dernière occurrence de x est aussi la première de y et $x = y$. Le parcours C est donc un circuit. Tous les sommets pouvant être considérés comme le premier, toutes les arêtes de tous les sommets de C appartiennent donc à C . La propriété d'appartenir à C est donc expansive. Le graphe G étant connexe, tous les sommets de G sont dans C . Donc C est un circuit eulérien. \square

2.2 Induction structurelle

Une classe de graphes est définie par induction structurelle lorsqu'elle est définie par la donnée d'objets initiaux et d'un ensemble d'opérations permettant de construire un nouvel objet de la classe à partir d'objets de la classe déjà construits. Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'une classe définie par induction structurelle, il suffit donc de la démontrer pour les objets initiaux et de montrer que si elle est vraie pour certains objets, elle demeure vraie lorsqu'on leur applique les opérations permettant de construire de nouveaux objets. Par exemple, les entiers sont définis par induction structurelle en prenant comme objet initial l'entier zéro et comme opération, le fait de prendre le successeur. Le raisonnement par induction structurelle sur les entiers se confond alors avec le raisonnement par récurrence. Les chemins sont caractérisés par la propriété d'induction structurelle suivante : un graphe est un chemin d'extrémité x si et seulement si c'est un sommet isolé x ou bien un sommet x relié à l'extrémité y d'un chemin. En conséquence, pour démontrer une propriété pour les chemins, il suffit de la démontrer pour un sommet isolé et de vérifier que si elle est vraie pour un chemin d'extrémité y , elle est vraie pour un sommet x relié à l'extrémité d'un chemin d'extrémité y .

Lemme 2.2. *Les arbres sont caractérisés par les propriétés d'induction structurelle suivantes :*

1. *Objet initial : un sommet isolé. Opération : n arbres reliés par exactement une arête à un même sommet isolé.*
2. *Objet initial : un sommet isolé. Opération : Un arbre relié par exactement une arête à un sommet isolé.*

Démonstration. Notons T l'ensemble des arbres, T_1 l'ensemble des graphes définis par la première propriété d'induction structurelle et T_2 l'ensemble des graphes définis par

la deuxième propriété d'induction structurelle. Les classes T_1 et T_2 ont même objet initial et l'opération de T_2 est une sous-ensemble strict des opérations de T_1 . Donc $T_2 \subset T_1$. Il suffit donc de démontrer que $T \subset T_2$ et $T_1 \subset T$. Soit $G \in T$. Si G est un sommet isolé ou une arête isolée, alors $G \in T_2$. Sinon, $t(G)$ est un arbre que l'on peut supposer appartenir à T_2 . L'arbre G est obtenu à partir de G en appliquant un nombre fini de fois l'opération de T_2 . Donc $G \in T_2$. Soit $G \in T_1$. Si G est un sommet isolé, alors $G \in T$. Sinon, G est un sommet isolé x relié par exactement une arête à n graphes t_i de T_1 , que l'on peut supposer être des arbres. La composante connexe de x contient la composante connexe de t_i pour tout i donc est G . Donc G est connexe. Soit C un cycle de G . Les t_i sont acycliques donc C n'est pas contenu dans un des t_i . Donc il passe par x et contient des sommets de l'un des t_i , disons t_1 . Le sommet x est de degré 2 dans C donc C contient des sommets d'un autre t_i , disons t_2 . Il existe donc un chemin de t_1 à t_2 ne passant par x . C'est absurde, donc C n'existe pas. Donc G est acyclique. Donc G est un arbre. \square

Corollaire 2.3. *Les graphes connexes sont caractérisés par la propriété d'induction structurelle suivante. Objet initial : le sommet isolé. Opération : Relier un sommet isolé par au moins une arête à un graphe connexe. Les graphes sont caractérisés par la propriété d'induction structurelle suivante. Objet initial : le sommet isolé. Opération : Relier un sommet isolé par au moins zéro arête à un graphe.*

Démonstration. Un graphe est connexe si et seulement s'il admet un arbre couvrant si et seulement s'il admet un sous-graphe couvrant défini par la propriété d'induction structurelle T_2 du lemme précédent. Un graphe est l'union disjointe des ses composantes connexes. \square

Lemme 2.4. *Un graphe connexe G vérifie $|X| - 1 \leq |E|$. Un graphe connexe G est un arbre si et seulement si $|X| - 1 = |E|$.*

Démonstration. La propriété est vraie pour un sommet isolé. Si elle est vraie pour un graphe connexe $G = (X, E)$ et si $G \cup \{x\}$ est un graphe connexe, alors x est de degré strictement positif. Donc $|G \cup \{x\}| - 1 = |X| \leq |E| + 1 \leq |E \cup (x, y)|$. Par induction structurelle, la propriété est vraie pour tout graphe connexe. La deuxième assertion est vraie pour un sommet isolé. Si elle est vraie pour n arbres T_1, \dots, T_n alors l'arbre T formé en reliant les T_i à un sommet externe vérifie :

$$|X(T)| - 1 = \sum_i |X(T_i)| = \sum_i |E(T_i)| + n = |E(T)|$$

Réciproquement, si T est connexe et vérifie $|X| - 1 = |E|$, alors $T' = T - \{e\}$ vérifie $|X'| - 1 > |E'|$ donc n'est pas connexe. Donc T est un arbre d'après la proposition 1.5. \square

3 Bestiaire

trois dimensions douze apôtres mille et une nuits trente-deux positions six parties du monde cinq points cardinaux dix ans de bons et loyaux services sept péchés capitaux deux doigts de la main dix gouttes avant chaque repas trente jours de prison dont quinze de cellule cinq minutes d'entr'acte et... plusieurs ratons laveurs. (Jacques Prévert).

3.1 Graphes élémentaires

3.1.1 Graphes complets, isolés

Le graphe complet K_n est le graphe $(\{1, \dots, n\}, X \times X)$. Le graphe isolé I_n est \bar{K}_n . Le graphe complet est bien évidemment connexe. Relier deux graphes complets en un sommet ou par une arête montre qu'il existe des graphes ayant degré minimal arbitrairement grand que l'on peut déconnecter en enlevant un seul sommet ou une seule arête.

3.1.2 Chemins élémentaires, cycles élémentaires

Le chemin élémentaire P_n est le chemin $\{1, \dots, n\}$. Le cycle élémentaire C_n est le cycle $\{1, \dots, n\}$. La considération d'un chemin maximal ou d'un chemin induit maximal est souvent fort utile. Les graphes ayant des chemins ou des cycles couvrants sont étudiés dans la section 7.

3.2 Graphes moins élémentaires

3.2.1 Graphes circulants

Un graphe G est dit circulant d'ordre n et de partie $S \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement $G = (X, E)$ avec $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $E = \{(x, y) \in X \times X \mid x - y \in S\}$. Il n'y a pas de

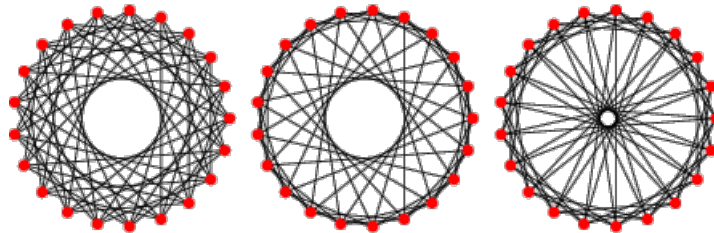


FIGURE 1 – Quelques graphes circulants

perte de généralité à considérer que $0 \notin S$ et que $-x \in S$ si et seulement si $x \in S$. Le graphe complet K_n est le graphe circulant $(n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; le graphe isolé I_n est le graphe circulant (n, \emptyset) ; le cycle élémentaire C_n est le graphe circulant $(n, \{-1, +1\})$.

Un graphe circulant est connexe si et seulement si S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et donc si et seulement si les éléments de S sont premiers dans leur ensemble avec n . Lorsqu'un

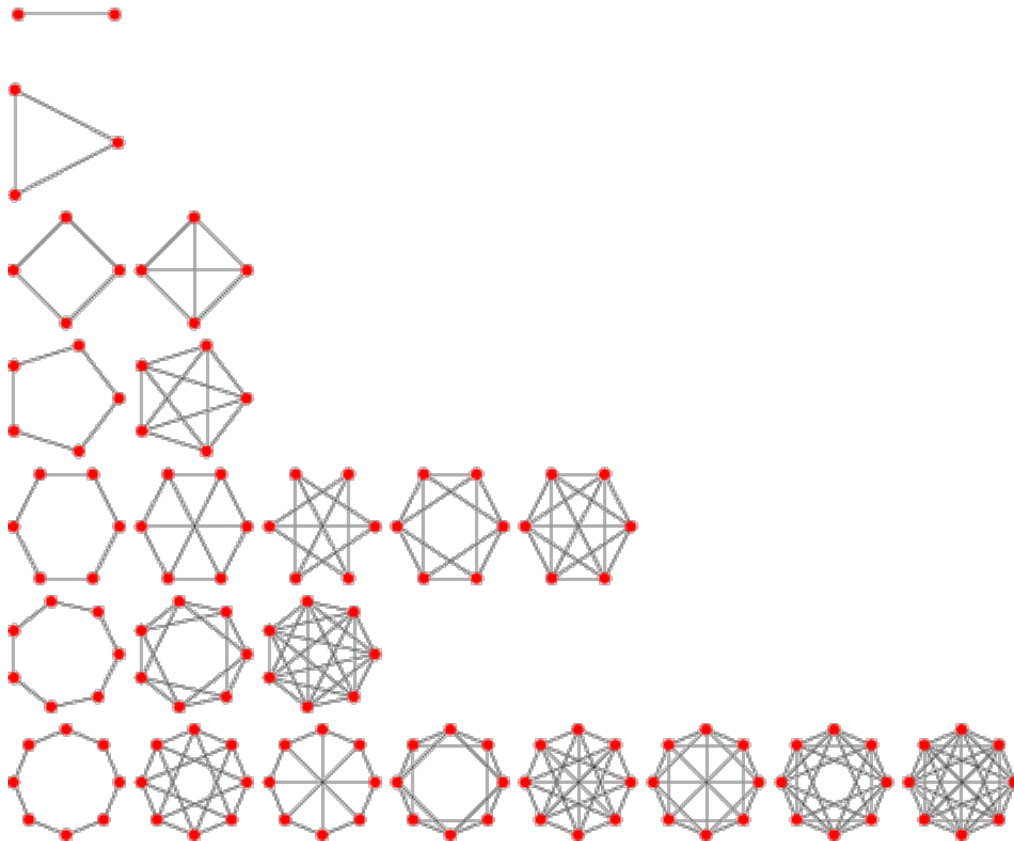


FIGURE 2 – Les graphes circulants connexes ayant moins de 8 sommets

graphe circulant est connexe, il admet un cycle couvrant (cette assertion hautement non-triviale est démontrée dans la section 7). Par construction, un graphe circulant est $|S|$ -régulier. Les graphes circulants sont donc de bons exemples de graphes réguliers non-complets.

3.2.2 Graphes de Cayley

Soit G un groupe fini et $C \subset G$. Un graphe $H = (G, E(G, C))$ est dit de Cayley pour G et C si et seulement $E(G, C) = \{(x, y) \in X(H) \times X(H) | xy^{-1} \in C\}$. A nouveau, nous voyons qu'il n'y a pas de perte de généralité à supposer que $e_G \notin C$ et que $x^{-1} \in C$ si et seulement si $x \in C$. Un graphe circulant est un graphe de Cayley pour $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

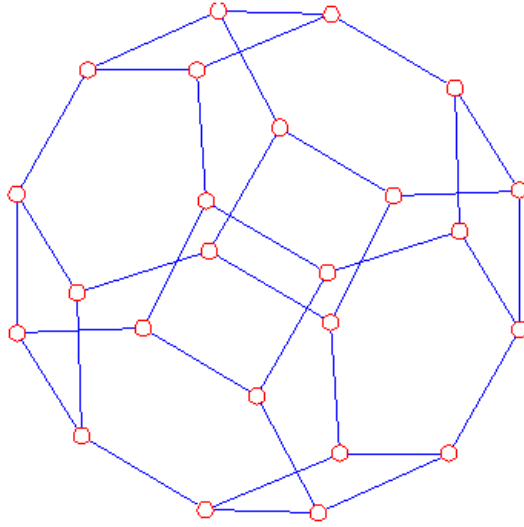


FIGURE 3 – Un graphe de Cayley

3.2.3 Graphes de Mycielski

Soit $G = (X, E)$ un graphe avec $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $M(G) = (X', E')$ le graphe tel que :

$$X' = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{z\}$$

$$E' = E \cup \{(y_i, z) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(x_i, y_j) \mid \forall (x_i, x_j) \in E\}$$

Si K_n n'est pas un sous-graphe de G , alors K_n n'est pas non plus un sous-graphe de $M(G)$. Par exemple, les graphes $K_2, M(K_2), M(M(K_2))\dots$ ne contiennent pas de triangles. Le graphe $M(M(K_2))$ s'appelle le graphe de Grötzsch.

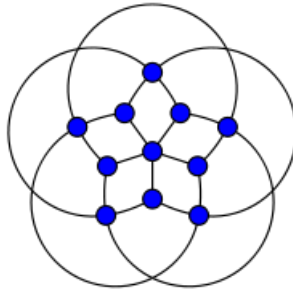


FIGURE 4 – Le graphe de Grötzsch $M(M(K_2))$

3.3 Bêtes curieuses et remarquables

3.3.1 Graphes bipartis

Un graphe (X, E) est dit biparti si et seulement s'il existe une partition de X en deux sous-ensembles disjoints $X_1 \cup X_2$ tel que si $(x, y) \in E$, alors $x \in X_1$ et $y \in X_2$. On note $K_{m,n} = (X, E)$ le graphe biparti avec $X = \{1, \dots, m\} \cup \{1, \dots, n\}$ et $E = \{(x, y) | x \in \{1, \dots, m\}, y \in \{1, \dots, n\}\}$. La propriété d'être un graphe biparti est connexe ascendante et fortement connexe-descendante donc est vraie pour G si et seulement si elle est vraie pour toutes les composantes connexes de G . On pourra donc se ramener sans perte de généralité au cas connexe lorsque l'on étudie la bipartition. Plus généralement, une bipartition de G définit une bipartition de $H \subset G$ pour tous sous-graphes de G . Ceci implique les assertions suivantes. Si un graphe est biparti, tous ses sous-graphes, et donc en particulier tous ses sous-graphes induits, sont également bipartis. Si G est un graphe et si H est un sous-graphe de G biparti, alors G est biparti si et seulement s'il existe une bipartition de H qui s'étende en une bipartition de G .

Lemme 3.1. *Les forêts sont des graphes bipartis. A l'échange des classes de bipartition près, les arbres admettent une unique bipartition qui est construite en assignant à $X_{i \bmod 2}$ l'ensemble des sommets à distance i d'un sommet de profondeur de taille maximale. Les cycles bipartis sont les cycles pairs.*

Démonstration. Un graphe est biparti si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont. Il suffit donc de démontrer que les arbres sont bipartis, qu'ils admettent une unique bipartition à l'échange des classes près et que cette bipartition est construite en assignant à $X_{i \bmod 2}$ l'ensemble des sommets à distance i d'un sommet de profondeur de taille maximale. Le sommet isolé x est biparti, n'admet essentiellement qu'une bipartition et cette bipartition est construite en assignant x à X_1 ou X_2 . Soit T' un arbre biparti dont l'unique bipartition à l'échange des classes près est donnée par la distance modulo 2 à un sommet de profondeur maximale. Soit T le graphe formé en reliant un sommet isolé x à un unique sommet $y \in X_i(T')$. Le graphe T est alors un arbre d'après le lemme 2.2. Assigner x à la classe $X_{3-i} = X_{(i+1) \bmod 2}$ montre qu'assigner l'ensemble des sommets à distance i d'un sommet de profondeur maximale est une bipartition de T , et c'est également l'unique bipartition de T une fois fixée une bipartition de T' . Toute bipartition de T s'étend à T' donc la bipartition de T est essentiellement unique. Par induction structurelle, les arbres sont donc bipartis, n'admettent essentiellement qu'une seule bipartition et cette bipartition est donnée par la distance à un sommet de profondeur maximale.

Soit C un cycle, e une arête de C et $P_e = (x_1, \dots, x_n)$ le chemin obtenu en supprimant e de G . Le graphe C est biparti si et seulement si l'unique bipartition de P_e s'étend à C donc si et seulement si $x_1 \in X_1$ entraîne $x_n \in X_2$ donc si et seulement si n est pair. \square

Proposition 3.2. *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair.*

Démonstration. Soit G un graphe. Les deux propriétés de l'énoncé sont vraies pour

G si et seulement si elles sont vraies pour toutes les composantes connexes de G . On peut donc sans perte de généralité supposer que G est connexe.

Si G est biparti et si C est un sous-cycle de G , la bipartition de G induit une bipartition de C donc C est un cycle pair. Réciproquement, supposons que G n'ait pas de cycle impair. Soit alors T un arbre couvrant de G et $e = (x, y)$ une arête de G . Si e est une arête de G qui n'est pas une arête de T , le graphe $T \cup e$ contient un cycle $C = (x, \dots, y) \subset G$ qui est donc pair. Donc x et y ne sont pas dans la même classe de bipartition de T . La bipartition de T s'étend donc à $T \cup e$ et donc à G . \square

3.3.2 Graphe des arêtes

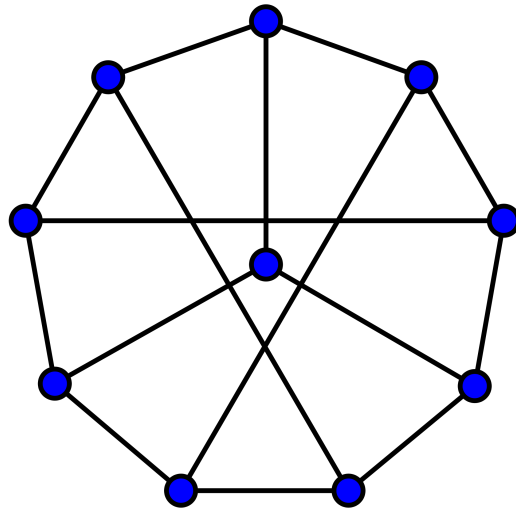
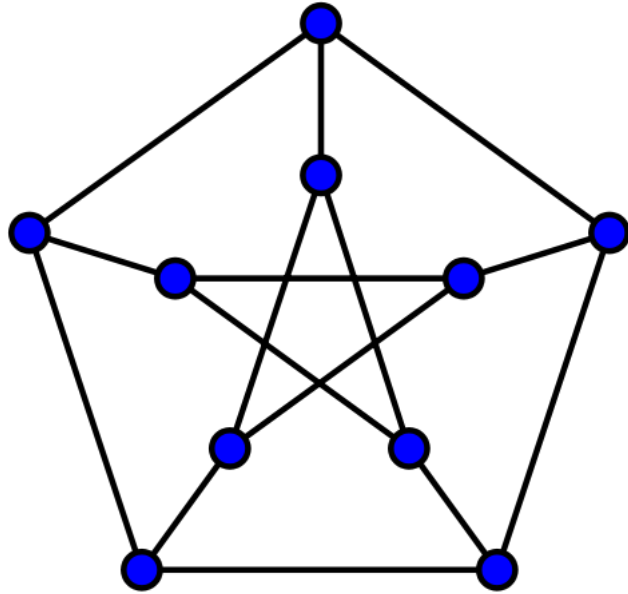
Soit $G = (X, E)$ un graphe avec $E \neq \emptyset$. Le graphe des arêtes $L(G)$ de E est le graphe $(E, \{(u, v) \in E \times E \mid u \cap v \neq \emptyset\})$.

Lemme 3.3. *Si G est connexe et contient une arête, $L(G)$ est connexe.*

Démonstration. Soit x un sommet de G de degré non-nul et soit $e = (x, y)$ une arête. Soit C la composante connexe de $L(G)$ contenant e . Soit Pr la propriété "Toutes les arêtes de u sont des sommets de C ". Toutes les arêtes incidentes à x sont des voisins de e donc x vérifie Pr . Soit u un sommet vérifiant Pr et v un voisin de u . L'arête (u, v) appartient à C donc toute arête incidente à v appartient à C . La propriété Pr est donc expansive. Tout sommet de G vérifie donc Pr , donc $L(G)$ n'a qu'une seule composante connexe. \square

3.3.3 Graphe de Petersen

Le graphe de Petersen $P = \overline{L(K_5)}$ est le complémentaire du graphe des arêtes de K_5 . En voici deux dessins possibles. Le lecteur observateur pourra aussi astucieusement remarquer qu'il orne la première page de ce bréviaire.



4 Isomorphismes

*Et qui n'est, chaque fois, ni tout à fait la même
Ni tout à fait une autre. (Paul Verlaine)*

4.1 Définitions

4.1.1 Rappel

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est le groupe des permutations opérant sur un ensemble à n éléments. Le groupe \mathfrak{S}_n est de cardinal $n!$, il est engendré par les transpositions et n'est pas commutatif sauf si $n = 1, 2$.

4.1.2 Groupes des automorphismes d'un graphe G

Soit $G = (X, E)$ et $H = (X', E')$ deux graphes. Soit $\text{Hom}(X, X')$ l'ensemble des bijections de X vers X' . Lorsque $|X| \neq |X'|$, cet ensemble est vide ; lorsque $X = X'$, cet ensemble s'identifie à \mathfrak{S}_n . Un élément $\sigma \in \text{Hom}(X, X')$ est un isomorphisme de G vers H si et seulement si $\sigma(x) \sim_H \sigma(y)$ si et seulement si $x \sim_G y$. On note $\text{Hom}(G, H)$ l'ensemble des isomorphismes de G vers H et $\text{Aut}(G) = \text{Hom}(G, G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

Lemme 4.1. *L'ensemble $\text{Aut}(G)$ est un groupe.*

Démonstration. C'est un sous-ensemble de \mathfrak{S}_n contenant l'identité, donc il suffit de vérifier que $\text{Aut}(G)$ est stable par inverse et composition. \square

On dit qu'une propriété est indépendante de la classe d'isomorphisme si elle est vraie pour un graphe G si et seulement si elle est vraie pour tout graphe H tel que $\text{Hom}(G, H)$ soit non-vide. Lorsque l'on s'intéresse à une telle propriété, il n'y a donc pas de généralités à remplacer G par un graphe qui lui est isomorphe. L'annexe III contient quelques propriétés qui sont et ne sont pas indépendantes de la classe d'isomorphisme.

Proposition 4.2. 1. *L'image par $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$ d'un sous-graphe induit de G est un sous-graphe induit de H . La restriction de $\sigma \in \text{Aut}(G)$ à un sous-graphe induit H est un élément de $\text{Hom}(H, H')$.*

2. *Si $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$, $d_G(x) = d_H(\sigma(x))$.*

3. *L'image d'une composante connexe de G par $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$ est une composante connexe de H .*

4. *Si $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$, la distance entre x et y dans G est égale à la distance entre $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$ dans H pour tout $x, y \in X$.*

5. *SI $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$, alors $\sigma^{-1} \in \text{Hom}(H, G)$.*

6. *Le groupe $\text{Aut}(G)$ est \mathfrak{S}_n si et seulement si $G = K_n$ ou $G = I_n$.*

7. $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\bar{G})$

- Démonstration.*
1. Soit $x, y \in G'$ induit dans G . Soit H' le sous-graphe de H induit par les images des sommets de G' . Alors $x \sim_{G'} y$ si et seulement si $x \sim_G y$ si et seulement si $\sigma(x) \sim_H \sigma(y)$ si et seulement si $\sigma(x) \sim_{H'} \sigma(y)$.
 2. Par définition d'un isomorphisme, $y \in N_G(x)$ si et seulement si $\sigma(y) \in N_H(\sigma(x))$.
 3. Soit x un sommet de G et Pr la propriété "Le sommet $\sigma(y)$ appartient à la composante connexe de H contenant $\sigma(x)$ ". Alors x vérifie Pr . Soit u un sommet de G vérifiant Pr et v un voisin de u . Alors $\sigma(u)$ est voisin de $\sigma(v)$ donc v vérifie Pr . Donc Pr est expansive; donc Pr est vérifiée pour tout sommet de la composante connexe de x . L'image de la composante connexe de x est donc incluse dans la composante connexe de $\sigma(x)$. En appliquant σ^{-1} , on voit que l'image de la composante connexe de x est la composante connexe de $\sigma(x)$.
 4. D'après l'assertion précédente, ces deux distances sont toutes les deux finies ou infinies. Dans le premier cas, le sous-graphe induit par un chemin de x à y est transformé par σ en un sous-graphe induit connexe de $\sigma(x)$ à $\sigma(y)$ de même cardinal. Donc $d_H(\sigma(x), \sigma(y)) \leq d_G(x, y)$. En considérant σ^{-1} , on en déduit que $d_G(x, y) = d_H(\sigma(x), \sigma(y))$.
 5. Soit $(x, y) \in X' \times X'$. Alors $x \sim_H y \Leftrightarrow \sigma(\sigma^{-1}(x)) \sim_H \sigma(\sigma^{-1}(y)) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(x) \sim_G \sigma^{-1}(y)$.
 6. Soit G un graphe tel que $\text{Aut}(G) = \mathfrak{S}_n$ avec $G \neq I_n$. Soit x un sommet de G de degré strictement positif, soit y un voisin de x et soit z un troisième sommet. Il existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tel que $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = z$. Donc $N_G(x) = G - \{x\}$. Il existe $\sigma' \in \text{Aut}(G)$ tel que $\sigma'(x) = z$ donc $N_G(z) = G - \{z\}$. Donc $G = K_n$.
 7. Soit $(x, y) \in X \times X$ et $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Alors $x \sim_G y \Leftrightarrow \sigma(x) \sim_G \sigma(y)$ donc $x \sim_{\bar{G}} y \Leftrightarrow \sigma(x) \sim_{\bar{G}} \sigma(y)$. Donc $\sigma \in \text{Aut}(\bar{G})$. On conclut en échangeant G et \bar{G} . □

On dit que $G = (X, E)$ est sommet-transitif si pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tel que $\sigma(x) = y$. Un graphe sommet-transitif est régulier. Si $\Gamma = \text{Aut}(G)$, on note X^Γ l'ensemble des sommets de G fixés par tous les éléments de Γ et on note E^Γ l'ensemble des arêtes de G fixées par tous les éléments de Γ .

4.2 Exemples

4.2.1 Graphes complets, isolés

Nous avons déjà vu que $\text{Aut}(G) = \mathfrak{S}_n$.

4.2.2 Chemins élémentaires, cycles élémentaires

Le chemin élémentaire P_n a pour groupe d'automorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le groupe des automorphismes de C_n est (par définition) le groupe diédral D_{2n} de cardinal $2n$. Il contient un unique sous-groupe cyclique d'ordre n .

Proposition 4.3. *Le groupe diédral D_{2n} est engendré par un élément τ d'ordre 2 et un élément σ d'ordre n . Ces deux éléments vérifient $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$.*

Démonstration. Soit $(i, j) = (i, i \pm 1)$ un couple orienté d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il existe alors un automorphisme de C_n qui envoie $(0, 1)$ sur (i, j) . Réciproquement, si g fixe le couple orienté $(0, 1)$, alors g est l'identité. L'ensemble des automorphismes de C_n est donc en bijection avec l'ensemble des couples orientés $(i, i + 1)$ et $(i, i - 1)$. Soit τ l'automorphisme qui envoie le sommet x sur $-x$ et σ l'automorphisme qui envoie x sur $x + 1$. Il existe alors une bijection entre les couples orientés $(i, j) = (i, i \pm 1)$ et les couples $\tau^e \sigma^i$. \square

4.2.3 Arbres

Proposition 4.4. *Soit $T = (X, E)$ un arbre de groupe d'automorphismes Γ .*

1. *La restriction de $\sigma \in \text{Aut}(T)$ à $t(T)$ est un automorphisme de $t(T)$. Les sommets de hauteurs de taille au moins h sont préservés par σ .*
2. *Ou bien $X^\Gamma \neq \emptyset$ ou bien $E^\Gamma \neq \emptyset$.*
3. *Si $X^\Gamma \neq \emptyset$, alors le sous-graphe induit par X^Γ est un arbre.*

Démonstration. 1. Soit $\sigma \in \text{Aut}(T)$. Alors σ préserve l'ensemble des feuilles de T donc également l'ensemble des sommets internes de T . La restriction à $t(T)$ induit donc un morphisme de groupes res de $\text{Aut}(T)$ vers $\text{Aut}(t(T))$, et donc vers $\text{Aut}(t^n(T))$ pour tout n .

2. L'ensemble des éléments de hauteur de taille maximale est un singleton ou une arête. Cet ensemble est fixé par $\text{Aut}(T)$.
3. Supposons maintenant $X^\Gamma \neq \emptyset$. Alors le sous-graphe induit par X^Γ est acyclique. Soit x, y deux sommets de X^Γ et $\sigma \in \Gamma$. Le chemin P de x à y est transformé par σ en un chemin de T de x à y , donc en P . Donc σ induit un automorphisme de P d'ordre au plus 2. Comme il fixe une extrémité, c'est l'identité. Donc $P \subset X^\Gamma$.

\square

Il est démontré en exercice que la classe C des groupes qui sont groupes d'automorphismes d'un arbre est définie par induction structurelle de la manière suivante. Objet initial : Le groupe trivial. Opérations : 1) Si $(G, H) \in C^2$, alors $G \times H \in C$. 2) Si $G \in C$ et $n \geq 2$, alors le produit en couronne de G et \mathfrak{S}_n est dans C .

4.2.4 Graphes circulants

Le groupe $\text{Aut}(G)$ contient le groupe D_{2n} comme sous-groupe. Le graphe G est sommet-transitif.

4.2.5 Graphes de Cayley

Soit G un graphe de Cayley pour un groupe fini Γ . Le groupe $\text{Aut}(G)$ contient le groupe Γ comme sous-groupe car

$$\begin{aligned}\sigma_h : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ g &\longmapsto gh\end{aligned}$$

est une inclusion de Γ dans $\text{Aut}(G)$. Le groupe Γ a une action simplement transitive sur G .

Proposition 4.5. [Théorème de Sabidussi] Soit G un graphe et Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ avec une action simplement transitive sur G . Alors G est un graphe de Cayley pour Γ .

Démonstration. Soit x un sommet de G . L'application

$$\begin{aligned}\phi : \Gamma &\longrightarrow X \\ \sigma &\longmapsto \sigma(x)\end{aligned}$$

est une bijection qui munit X d'une structure de groupe par identification. Soit S la pré-image de $N_G(x)$ par ϕ . Alors $u \sim_G v$ est équivalent à $\sigma_v^{-1}\sigma_u \in S$ pour σ_u et σ_v les pré-images de u et v par ϕ . \square

Soit $G = (\Gamma, S)$ et $H = (\Gamma', S')$ deux graphes de Cayley. On dit qu'ils sont isomorphes en tant que graphes de Cayley s'il existe $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$ tel que $\sigma(S) = S'$.

4.2.6 Graphe de Petersen

Proposition 4.6. $\text{Aut}(P) \simeq \mathfrak{S}_5$

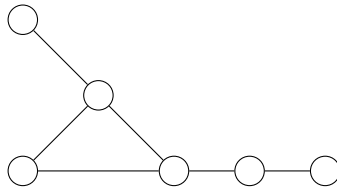
Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Aut}(K_5)$. L'application σ^* de $L(K_5)$ dans $L(K_5)$ définie par $\sigma^*(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$ est une application de $\text{Aut}(K_n)$ dans $\text{Aut}(L(K_5)) = \text{Aut}(P)$. Si σ^* fixe l'arête (a, b) , alors $\sigma(a) = a$ ou $\sigma(a) = b$ et $\sigma(b) = a$, auquel cas σ^* ne fixe pas l'arête (b, c) . Donc, si σ^* est l'identité, alors σ est l'identité. Donc \mathfrak{S}_n s'injecte dans $\text{Aut}(P)$. Réciproquement, si $\sigma^* \in \text{Aut}(L(K_5))$, σ^* transforme la 4-clique de $L(K_5)$ formée des 4 arêtes incidentes en x en une 4-clique. 4 arêtes sont incidentes entre elles seulement si elles le sont en un voisin commun, que nous notons $\sigma^{**}(x)$. L'application qui à σ^* associe σ^{**} est une application de $\text{Aut}(L(K_5))$ dans $\text{Aut}(K_5)$. Si σ^{**} est l'identité, alors l'arête $\sigma^*(x, y)$ est une arête incidente à x et à y , donc σ^* est l'identité. Donc $\text{Aut}(L(K_5))$ s'injecte dans \mathfrak{S}_n . Donc $\text{Aut}(L(K_5)) = \mathfrak{S}_n$. \square

Corollaire 4.7. Le graphe de Petersen n'est pas un graphe de Cayley.

Démonstration. D'après le corollaire 12.2, à isomorphisme près, il n'existe que deux groupes d'ordre 10 : le groupe cyclique $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et le groupe diédral D_{10} . Le groupe $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ a un élément d'ordre 10 alors que l'ordre maximal d'un élément de \mathfrak{S}_5 est 6. Donc P n'est pas un graphe circulant. Le groupe \mathfrak{S}_5 contient un sous-groupe Γ isomorphe à D_{10} engendré par σ d'ordre 5 et τ d'ordre 2. L'élément τ agit avec un point fixe sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et quitte à renuméroter, on peut supposer que 3 est un point fixe et que $\sigma(i) = i + 1$. La relation $\tau\sigma\tau(3) = 2$ implique alors que $\tau(4) = 2$. La relation $\tau\sigma\tau(2) = 1$ implique alors que $\tau(5) = 1$. L'élément τ est donc le produit des deux transpositions (15) et (24). L'élément $\tau^\epsilon\sigma^i$ envoie alors $(1, 2) \in X(P)$ sur $\tau^\epsilon(1 + i, 2 + i)$. Donc, si $\tau^\epsilon\sigma^i(1, 2) = (x, 3)$, alors $x = 2$ ou $x = 4$. Donc $(1, 3)$ n'est pas dans l'orbite de $(1, 2)$ sous Γ donc Γ n'agit pas transitivement sur $X(P)$. D'après la proposition 4.5, le graphe de Petersen n'est donc pas un graphe de Cayley. \square

4.2.7 Graphe asymétrique

Un graphe G est dit asymétrique si et seulement si $\text{Aut}(G) = \{\text{Id}\}$. Le graphe suivant est asymétrique.



5 Connectivité

*Alguna vez, los senderos de ese laberinto convergen*². (Jorge Luis Borges).

5.1 Généralités

Un sous-ensemble $S \subset X$ est appelé un ensemble de séparateurs d'un graphe G si $G - S$ n'est pas connexe. Soit $k \geq 0$ un entier. Un graphe G est dit k -connexe si et seulement si $|G| > k$ et si tout séparateur $S \subset X$ de G est de cardinal au moins k . De manière équivalente, un graphe G est k -connexe si et seulement si $|G| > k$ et si pour tout sous-ensemble $S \subset X$ de cardinal strictement inférieur à k , le graphe $G - S$ est connexe. Tous les graphes sont 0-connexes. La 1-connectivité se confond avec la connexité usuelle lorsque G n'est pas un sommet isolé. La connectivité $\kappa(G)$ de G est le plus grand entier k tel que G soit k -connexe.

Si A et B sont deux sous-ensembles de X , un chemin $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ est un chemin $A - B$ si et seulement si $P \cap A = \{x_1\}$ et $P \cap B = \{x_k\}$. Un ensemble $S \subset X$ sépare A de B si tout chemin $A - B$ contient un sommet de S .

Lemme 5.1. *Soit G un graphe de connectivité κ . Alors il existe un couple de sommets $(x, y) \in X \times X$ tel qu'il n'existe pas $\kappa + 1$ chemins intérieur-disjoints de x à y*

Démonstration. Par définition de κ , il existe un ensemble de sommets S de cardinal κ tel que $G - S$ ait au moins deux composantes connexes C_1 et C_2 . Soit $x \in C_1$ et $y \in C_2$. Alors tout chemin de x à y passe par un sommet de S . Il en existe donc au plus κ qui soient mutuellement intérieur-disjoints. \square

Un graphe G de cardinal strictement supérieur à 1 est dit k -arête-connexe si et seulement si pour tout sous-ensemble $S \subset E$ de cardinal strictement inférieur à k , le graphe $G - S$ est connexe. Tous les graphes de cardinal au moins 2 sont 0-arêtes-connexes et les graphes 1-arêtes-connexes sont les graphes connexes à au moins deux sommets. Un isthme est une arête e d'un graphe connexe G tel que $G - e$ est non connexe. La e -connectivité $\lambda(G)$ de G est le plus grand entier k tel que G soit k -arête-connexe.

Proposition 5.2. *Soit G un graphe de cardinal au moins 2. Alors $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Démonstration. Soit x un sommet de degré $\delta(G)$ et soit S l'ensemble des arêtes incidentes à x . Alors $G - S$ n'est pas connexe donc $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Soit maintenant S un ensemble minimal d'arêtes tel que $G - S$ ne soit pas connexe. Supposons tout d'abord qu'il existe $x \in X$ qui ne soit incident à aucune arête de S . Soit C la composante de x dans $G - S$. Soit S' l'ensemble des sommets de C incidents à une arête de S . Si u est un sommet de S' incident à une arête (u, v) de S , alors v n'est pas dans la même composante connexe que u dans $G - S$ par minimalité de S donc $v \notin C$. Donc u est adjacent à au moins un sommet qui n'est pas dans C . Donc $|S'|$ est plus petit que $|S|$. L'ensemble S' est un séparateur de G donc $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

²Parfois, les sentiers de ce labyrinthe convergent.

Supposons maintenant que tout $x \in X$ est incident à une arête de S et soit u un sommet de degré minimal. Soit N l'ensemble des voisins de u dans $G - S$. Tous les sommets de N sont dans la même composante connexe de $G - S$ donc il n'existe pas d'arêtes de S de la forme $(v, w) \in N \times N$ par minimalité de S . Les sommets de N sont donc incidents à des arêtes distinctes de S . Les voisins de u dans G sont les sommets de N et les extrémités d'arêtes de S donc $|N_G(u)| \leq |S|$. Si $N_G(u)$ est un ensemble de séparateurs de G , on en déduit que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Sinon, le graphe $G - N_G(u)$ est connexe donc est réduit à l'unique sommet u . Donc $\delta_G = |G| - 1$ donc $G = K_n$. Dans ce cas, $\kappa(G) = \lambda(G)$. \square

Remarque : Les inégalités de la proposition précédente sont optimales au sens où elles deviennent des égalités par exemple pour les cycles. Inversement, il est aisé de construire des graphes tels que la différence entre $\kappa(G)$ et $\lambda(G)$, ou entre $\lambda(G)$ et δ_G , soit arbitraire : il suffit pour cela de considérer l'union de deux graphes fortement connexes ayant seulement un sommet en commun, ou relié par un isthme.

Lemme 5.3 (Lemme d'extension). *Soit G un graphe k -connexe et x un sommet externe à G . Le graphe G' obtenu en reliant G à x par k arêtes est k -connexe.*

Démonstration. Soit S' un ensemble de séparateurs de G' et soit $S = S' \cap X$. Si S est un ensemble de séparateurs de G , alors $|S| \geq k$. Sinon, $G - S$ est connexe. Le graphe $G' - S'$ a au moins deux composantes connexes donc x est un sommet isolé dans $G' - S'$ donc $|S'| > k$. \square

Lemme 5.4. 1. *Soit G un graphe connexe et $e = (x, y) \in E$ un isthme de G . Alors $G - e$ a deux composantes connexes ; l'une contenant x et l'autre contenant y .*

2. *Soit $k \geq 1$. Soit G un graphe k -connexe et $e = (x, y) \in E$. Alors $G - e$ est $k - 1$ -connexe.*

Démonstration. 1. Soit $a \in X$. Il existe un chemin de a à x dans G . Si a n'appartient pas à la composante connexe de x dans $G - e$, le chemin de a à x dans G passe par e donc a appartient à la composante connexe de y .

2. Supposons que $G' = G - e$ ne soit pas $k - 1$ -connexe. Il existe alors un ensemble S' de sommets de cardinal $k - 2$ séparant G' . Alors S' ne sépare pas G donc x et y ne sont pas dans S' et e est un isthme de $G - S'$. Donc $G - S'$ a exactement deux composantes connexes distinctes C_x et C_y . Supposons que $|G| > k$. Alors $|G - S'| > 2$ donc l'une des composantes, disons C_x , contient un autre sommet z . Alors $S = S' \cup \{x\}$ sépare z de y . Donc G n'est pas k -connexe. \square

5.2 Théorème de Menger

Théorème 1 (Théorème de Menger). *Un graphe G est k -connexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe k chemins intérieur-disjoints de x à y .*

Il est en fait plus facile de montrer le résultat plus général suivant.

Théorème 2 (Théorème de Menger général). *Soit A et B deux sous-ensembles distincts de X . Le nombre maximal de chemins $A - B$ disjoints est égal au cardinal du plus petit ensemble séparant A de B .*

Démonstration. Soit n le cardinal d'un ensemble maximal N de chemins $A - B$ disjoints et m le cardinal d'un ensemble séparant A de B et de taille minimale.

Pour séparer A de B , il est nécessaire de supprimer un sommet sur chacun des n chemins $A - B$ disjoints de N . Donc $n \leq m$. Montrons l'inégalité inverse.

On raisonne par récurrence sur $|E|$. Si $|E| = 0$, alors N est égal à $A \cap B$. Donc N est un ensemble séparant minimal donc $n = m$. Supposons maintenant que E contienne une arête $e = (x, y)$ et que tout graphe G' tel que $|E'| < |E|$ vérifie le théorème. Soit $(A, B) \subset X \times X$. Soit A' (resp. B') le sous-ensemble de sommet de G/e égal à $\{u \in A \cap X(G/e)\}$ (resp. $\{u \in B \cap X(G/e)\}$) auquel on ajoute v_e si x ou y appartient à A (resp. à B). Soit s' le cardinal d'un ensemble S' de taille minimale séparant A' de B' . Par hypothèse de récurrence, il existe s' chemins intérieur-disjoints de A' à B' dans G/e . Ces chemins induisent s' chemins $A - B$ disjoints donc $n \geq s'$. Si $v_e \notin S'$, alors S' est un ensemble séparant de G donc $s' \geq m$. Donc $n \geq m$.

Si S' contient v_e , alors $S = S' - \{v_e\} \cup \{x, y\}$ est un sous-ensemble de X formé de $s = s' + 1$ sommets séparant A et B . Donc $s \geq M$. Tout chemin de A à B dans G passe par un sommet de S donc tout ensemble séparant A de B et contient donc au moins M sommets. Par hypothèse de récurrence, le nombre N_1 de chemins disjoints de A à S dans $G - e$ est donc au moins M . Soit P l'ensemble de cardinal au moins M des extrémités de ces chemins. Un ensemble séparant B de P dans $G - e$ sépare B de A dans $G - e$ donc est de cardinal au moins M . Il existe donc au moins M chemins disjoints de B à P . On a construit ainsi M chemins distincts de A à B . Donc $N \geq M$. \square

Corollaire 5.5. *Soit $H \subset G$ un sous-graphe et $x \notin H$. Le nombre maximal de chemins reliant x à H et n'ayant que x comme sommet commun est égal au cardinal du plus petit ensemble séparant x de H . Le nombre maximal de chemins intérieur-disjoints reliant x à $y \notin N_G(x)$ est égal au cardinal du plus petit ensemble ne contenant ni x ni y et séparant x de y .*

Démonstration. Posons $A = N_G(x)$. Le nombre maximal de chemins $A - H$, donc le nombre maximal de chemin de x à H n'ayant que x comme sommet commun, est alors égal au cardinal du plus petit ensemble séparant A de H , donc au cardinal du plus petit ensemble ne contenant pas x et séparant x de H . La deuxième assertion est la première appliquée au cas $H = N_G(y)$. \square

Démontrons maintenant le théorème de Menger.

Démonstration. Supposons $k = 0$. Les deux termes de l'équivalence sont alors vrais pour tout G , donc équivalents. Supposons $k > 0$ et le théorème vraie pour $k - 1$. S'il existe k -chemins intérieur-disjoints de x à y pour tout $(x, y) \in X \times X$, alors G est k -connexe. Réciproquement, supposons que G est k -connexe. Considérons $(x, y) \in X \times X$. Si $x \approx_G y$, le corollaire précédent montre qu'il existe au moins autant de

chemins intérieur-disjoints de x à y que de séparateurs de x et y . Si $x \sim y$, alors $G - (x, y)$ est $(k - 1)$ -connexe. Il existe donc $k - 1$ chemins intérieur-disjoints de x à y dans $G - (x, y)$, donc k dans G . \square

6 Algèbre linéaire

Hamlet : Où veux-tu me conduire ? Parle, je n'irai pas plus loin.

Le Spectre : Écoute-moi bien. (William Shakespeare).

6.1 Endomorphisme associé à un graphe

6.1.1 Généralités

Soit $G = (X, E)$ un graphe de cardinal n et soit K un corps. Soit K^X l'espace vectoriel des fonctions sur X à valeurs dans K . Le graphe G définit un endomorphisme de K^X :

$$\begin{aligned} \phi(G) : K^X &\longrightarrow K^X \\ v &\longmapsto x \mapsto \sum_{y \sim x} v(y) \end{aligned}$$

L'espace K^X admet une famille $F(\mathfrak{S}_n)$ de bases canoniques : les familles $(v_x)_{x \in X}$ avec $v_x(y) = \delta_{xy}$ (deux éléments de $F(\mathfrak{S}_n)$ ont les mêmes éléments mais dans un ordre éventuellement différent, ce qui justifie l'indexation par \mathfrak{S}_n). Par définition :

$$\phi(G)(v_x) = z \mapsto \sum_{y \sim z} v_x(y) = z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \sum_{y \sim x} v_y$$

Une matrice $A(G)$ de G est la matrice de $\phi(G)$ relative à un choix d'une telle base. Le polynôme caractéristique $\mu(G)$ et le spectre $\text{Spec } G$ de G sont par définition le polynôme caractéristique et le spectre de $\phi(G)$.

Lemme 6.1. *Deux matrices d'adjacence sont conjuguées sous l'action d'une matrice de permutation*

Démonstration. Ceci résulte du fait que deux bases de $F(\mathfrak{S}_n)$ sont images l'une de l'autre sous une permutation de \mathfrak{S}_n . \square

Supposons que K soit \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors K^X est muni d'une forme hermitienne $(\cdot | \cdot)$ définie par $(v_x | v_y) = \delta_{xy}$ et étendue à par antilinéarité à gauche et linéarité à droite.

Théorème 3. *Supposons $K = \mathbb{R}$. Alors ϕ est un endomorphisme symétrique. En particulier, il est diagonalisable dans une base orthonormée et $\text{Spec } G \subset \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit v_x et v_y deux éléments d'une base de la famille canonique de K^X . Il suffit de montrer que $(\phi(v_x) | v_y) = (v_x | \phi(v_y))$. Ces deux quantités sont égales respectivement à 1 si x et y sont voisins et à 0 sinon. \square

En particulier, si $V \subset K^X$ est un sous-espace vectoriel stable sous $\phi(G)$, alors $\phi(G)|_V$ est diagonalisable. Si X_1 est l'ensemble des sommets d'une composante connexe de $\phi(G)$, alors K^{X_1} est stable par $\phi(G)$. On pourra donc se restreindre pour l'étude de $\phi(G)$ au cas des graphes connexes.

On donne quelques propriétés élémentaires de $\phi(G)$ lorsque $\mathbb{Q} \subset K$.

Proposition 6.2. 1. Le nombre de parcours de x à y de longueur s est donnée par $(\phi^s(v_x)|v_y)$.

2. La trace de $\phi(G)$ est nulle. La trace de $\phi(G)^2$ est égale à $2|E|$; la trace de $\phi(G)^3$ est égale à 6 fois le nombre de triangles dans G .

6.1.2 Théorème de Sachs

Un graphe simple est dit sesquivalent si et seulement si chacune de ses composantes est une arête isolée ou un cycle.

Théorème 4 (Théorème de Sachs). Soit G un graphe d'endomorphisme ϕ . Soit

$$\mu_\phi = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$$

le polynôme caractéristique de ϕ . Alors :

$$\alpha_k = \sum_H (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$$

La somme précédente est prise sur tous les sous-graphes sesquivalents de G ayant $n - k$ sommets. Les entiers $r(H)$ et $c(H)$ désignent respectivement le nombre de composantes connexes de H et le nombre de composantes connexes de H qui sont des cycles.

En particulier, le coefficient α_{n-2} est égal à $-|E|$ et α_{n-3} est égal à -2 fois le nombre de triangles de G .

Démonstration. Supposons tout d'abord $k = 0$. Alors $\alpha_0 = \det \phi$. On choisit une matrice d'adjacence A de ϕ .

$$\det \phi = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

Supposons qu'il existe i tel que $a_{i\sigma(i)} = 0$. Alors le terme $\epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ est nul. La contribution de σ à $\det \phi$ est donc non nulle, auquel cas elle est égale à ± 1 , si et seulement si $a_{i\sigma(i)} \neq 0$ pour tout i . Les orbites de σ sont donc toutes de cardinal au moins 2. Sur l'orbite \mathcal{O} , la permutation σ agit comme un cycle. A \mathcal{O} est donc associé un sous-cycle $H_{\mathcal{O}}$ de G défini par $X(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et $E(\mathcal{O}) = \{(i\sigma(i)) | i \in \mathcal{O}\}$. A σ est donc associé le graphe sesquivalent H_σ égal à l'union des $H_{\mathcal{O}}$ prise sur les orbites de σ .

Réciproquement, soit H un graphe sesquivalent avec $X(H) = X(G)$. A H est associé un sous-ensemble \mathfrak{S}_H de \mathfrak{S}_n par le procédé suivant : la permutation σ appartient à \mathfrak{S}_H si et seulement si $H_\sigma = H$. Le cardinal de \mathfrak{S}_H est alors égal à $2^{c(H)}$ car chaque composante connexe C de H définit deux permutations : la permutation cyclique correspondant au parcours des sommets de C dans un sens et celle correspondant

au parcours dans l'autre sens. Remarquons que deux permutations de \mathfrak{S}_H ont les mêmes orbites donc la même signature $\epsilon(H)$, à savoir $(-1)^{n-r(H)}$.

D'après la discussion précédente :

$$\det \phi = (-1)^n \sum_H (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$$

La somme est prise sur tous les sous-graphes sesquivalents de cardinal n de H . Donc :

$$\alpha_0 = \sum_H (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$$

et la propriété est bien vraie pour $k = 0$.

Soit maintenant k quelconque. Alors α_k est la somme des déterminants des k -mineurs de A . Donc :

$$\alpha_k = (-1)^{n-k} \sum_H (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$$

La somme est prise sur tous les sous-graphes sesquivalents de G ayant exactement $n - k$ sommets. En effet, les sous-graphes sesquivalents de G de cardinal $n - k$ sont les sous-graphes sesquivalents de cardinal maximum des sous-graphes de G obtenus en supprimant k sommets.

Le cas particulier de α_{n-2} et α_{n-3} s'en déduit en observant que les arêtes isolées sont les seuls graphes sesquivalents à deux sommets et que les K_3 sont les seuls graphes sesquivalents à 3 sommets. \square

6.2 Spectre

6.2.1 Généralités

Un vecteur $v \in K^X$ est un vecteur propre de G pour la valeur propre $\lambda \in K$ si et seulement si $v \neq 0$ et

$$\phi(G)(v) = \lambda v$$

donc si et seulement si $v \neq 0$ et :

$$\forall x \in X, \sum_{y \sim x} v(y) = \lambda v(x)$$

Proposition 6.3. *Un graphe k -régulier connexe G admet k comme valeur propre maximale avec multiplicité 1. Les vecteurs propres de \bar{G} sont les vecteurs propres de G .*

Démonstration. Le vecteur $\sum_{x \in X} v_x$ est vecteur propre de $\phi(G)$ pour la valeur propre k . Soit $v \in K^X$ un vecteur propre de $\phi(G)$ de valeur propre λ normalisé afin qu'il existe $x \in X$ tel que $v(x) = 1$ et $|v(y)| \leq 1$ pour tout $y \in X$. Alors :

$$\left| \sum_{y \sim x} v(y) \right| = |\lambda| v(x) = |\lambda| \leq k \max_y v(y) \leq k$$

Donc $|\lambda| \leq k$. Il y a égalité seulement si $v(y) = 1$ pour tout $y \in X$. La propriété $v(z) = 1$ est donc expansive.

Le graphe \bar{G} est $n - k - 1$ -régulier et admet $n - k - 1$ comme valeur propre pour le vecteur propre $v = \sum_{x \in X} v_x$. La matrice $A(\bar{G})$ vérifie $A(\bar{G}) = J - A(G) - \text{Id}$.

Les vecteurs propres v' de \bar{G} distincts de v sont orthogonaux à v donc $A(\bar{G})v' = -A(G)v - \text{Id}v = (-\lambda - 1)v'$. \square

Proposition 6.4. 1. Le spectre du graphe complet K_n est $\{(-1)^{n-1}, n - 1^{(1)}\}$.

2. Soit ζ une racine primitive n -ième de l'unité. Le spectre de C_n est $\{\zeta^i + \zeta^{-i} | i \in [0, n - 1]\}$.

3. Le polynôme caractéristique μ_n de P_n vérifie la relation de récurrence $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = X$ et $\mu_{n+1} = X\mu_n - \mu_{n-1}$. Soit ζ une racine primitive $(2n + 2)$ -ième de l'unité. Le spectre de P_n est $\{\zeta^i + \zeta^{-i} | 1 \leq i \leq n\}$.

4. Soit ζ une racine primitive n -ième de l'unité. Le spectre d'un graphe circulant (n, S) est $\{P(\zeta^i) | i \in [0, n - 1]\}$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme :

$$P = \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{1}_S(x) X^x$$

5. Si $G = (\Gamma, S)$ est un graphe de Cayley et si χ est un morphisme de groupes de Γ dans \mathbb{C}^\times , alors

$$v = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma) v_\gamma$$

est un vecteur propre de G pour la valeur propre $\sum_{s \in S} \chi(s)$.

6. Soit $G = (\Gamma, S)$ un graphe de Cayley avec Γ commutatif. Alors Γ admet n morphismes de groupes vers \mathbb{C}^\times formant une base de vecteurs propres de G .

Démonstration. 1. On considère le spectre de $J - \text{Id}$ ou bien on utilise la relation fondamentale.

2. Le vecteurs $v_i(x) = \zeta^{ix}$ est propre pour la valeur propre $\zeta^i + \zeta^{-i}$. Ils forment une famille libre sauf si v_i et v_{n-i} sont liés. Ces deux vecteurs sont distincts et ont même première composante.

3. Soit v un vecteur propre de P_n pour la valeur propre λ . Alors $v \neq 0$ donc l'ensemble des x tels que $v(x) \neq 0$ a un élément minimal. Si $x \neq 1$, alors $\lambda v(x - 1) = v(x) + v(x - 2)$ donc $v(x) = 0$. C'est absurde donc $x = 1$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $v(1) = 1$. Alors $v(2) = \lambda$ et $v(i + 1) = \lambda v(i) - v(i - 1)$ pour $2 \leq i \leq n - 1$. Donc $v(i + 1) = \mu_i(\lambda)$. Donc v est déterminé par $v(1)$, ce qui implique que λ est de multiplicité 1. Enfin, $\lambda v(n) - v(n - 1) = 0$ donc $\mu_n(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de μ_n . Soit C le cycle de cardinal $2n + 2$. Alors $v(x) = \zeta^{ix}$ et $w(x) = \zeta^{-ix}$ sont des vecteurs propres de C pour la valeur propre $\zeta^i + \zeta^{-i}$. Donc $v - w$ est un vecteur propre

de C pour la même valeur propre et $(v-w)(0) = (v-w)(n+1) = 0$. Le vecteur $v-w$ restreint à P_n est donc un vecteur propre de P_n

4. Soit σ l'endomorphisme de K^X qui envoie v_x sur v_{x+1} pour tout $x \in X$. Soit P le polynôme $P = \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{1}_S(x)X^x$. Alors :

$$P(\sigma)(v_0) = \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{1}_S(x)\sigma^x(v_0) = \sum_{x \in S} v_x = \sum_{x \sim 0} v_x = \phi(G)(v_0)$$

Donc $\phi = P(\sigma)$ donc $\text{Spec } G = \{P(\zeta) \mid \zeta^n = 1\}$.

5. Soit v comme dans l'assertion.

$$\begin{aligned} \phi(G)(v) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma)\phi(G)(v_\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{s \in S} \chi(\gamma)v_{\gamma s^{-1}} \\ &= \sum_{u \in \Gamma} \sum_{s \in S} \chi(us)v_u = \left(\sum_{s \in S} \chi(s) \right) \sum_{u \in \Gamma} \chi(u)v_u \end{aligned}$$

6. D'après le corollaire 12.4, le groupe Γ admet $|\Gamma|$ morphismes de groupes vers \mathbb{C}^\times qui, vus comme éléments de \mathbb{C}^X , sont orthogonaux pour le produit scalaire de \mathbb{C}^X . Ils forment donc une base de \mathbb{C}^X , et il s'agit d'une base de vecteurs propres d'après le point précédent.

□

Proposition 6.5. *Soit G un graphe k -régulier et L son graphe des arêtes. Alors $\mu(L, X) = (X+2)^{e-n}\mu(G, X-k+2)$. Le spectre de L est donc $\{\lambda^{(i)} + k - 2 \mid \lambda^{(i)} \in \text{Spec}(G)\} \cup \{-2^{(e-n)}\}$*

Démonstration. Soit B la matrice dont les colonnes sont indexées par les arêtes de G , les lignes par les sommets de G et telle que $b_{ij} = 0$ sauf si le sommet i est sur l'arête j . Le produit scalaire de deux colonnes est 0 sauf si ces colonnes sont confondues, auquel cas il vaut 2, ou bien si les arêtes correspondantes sont incidentes, auquel cas il vaut 1. Le produit scalaire de deux lignes vaut 0 sauf si ces deux lignes sont confondues, auquel cas il vaut k , ou si les deux sommets correspondants sont voisins, auquel cas il vaut 1. Donc $B^t B = k \text{Id}_n + \phi(G)$ et ${}^t B B = 2 \text{Id}_e + \phi(L)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mu(L, X-2) &= \det((X-2) \text{Id}_e - \phi(L)) = \det(X \text{Id}_e - 2 \text{Id}_e - \phi(L)) \\ &= \det(X \text{Id}_e - {}^t B B) = X^{e-n} \det(X \text{Id}_n - B^t B) \\ &= X^{e-n} \det((X-k) \text{Id}_n - \phi(G)) \end{aligned}$$

□

Proposition 6.6. *Le spectre du graphe de Petersen est $\{-2^{(4)}, 1^{(5)}, 3^{(1)}\}$.*

Démonstration. Le spectre de K_5 est $\{(-1)^{(4)}, 4^{(1)}\}$. Donc le spectre de $L(K_5)$ est $\{-2^{(5)}\} \cup \{1^{(4)}, 6^{(1)}\}$. Donc le spectre de $L(K_5)$ est $\{-2^{(4)}, 1^{(5)}, 3^{(1)}\}$. On donne une autre preuve de ce résultat. Soit $\psi \in \text{End}(K_X)$ défini par :

$$\psi(v_x) = \sum_{z \in X} v_z$$

Remarquons que le nombre de parcours de longueur 2 d'un sommet x du graphe de Petersen à un autre sommet y est 3 si $x = y$ (un pour chaque voisin de x), 0 si $x \sim y$ car dans ce cas x et y n'ont aucun sommet voisin et 1 si $x \sim y$ et $x \neq y$ car x et y ont alors unique voisin commun (l'unique arête de K_5 incidente à aucun des sommets de x et y). Donc $\phi(G)^2 = 3\text{Id} + (\psi - \text{Id} - \phi(G))$ ou encore $\phi(G)^2 + \phi(G) - 2\text{Id} = \psi$. Les vecteurs propres pour $\lambda \neq 0$ sont dans le noyau de ψ donc $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ donc $\lambda \in \{1, -2\}$. La valeur propre 3 est de multiplicité 1, ce qui détermine les multiplicités de 1 et -2. \square

6.2.2 Entrelacement

Dans cette sous-section, le corps K est choisi égal à \mathbb{R} . Un endomorphisme symétrique ψ de \mathbb{R}^X est dit semi-défini positif si et seulement si :

$$\forall v \in \mathbb{R}^X, (\psi(v)|v) \geq 0$$

En exprimant v dans une base de vecteurs propres pour ψ orthonormés, on voit que ψ est semi-défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Proposition 6.7. *Soit λ_{\min} et λ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de G respectivement. Alors $\delta_G \leq \lambda_{\max} \leq \Delta_G$. Soit H un sous-graphe induit de G et μ_{\min} et μ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de H . Alors $\lambda_{\min} \leq \mu_{\min} \leq \mu_{\max} \leq \lambda_{\max}$*

Démonstration. Nous savons déjà que $\lambda_{\max} \leq \Delta_G$. L'endomorphisme $\lambda_{\max} \text{Id} - \phi(G)$ est positif semi-défini donc $(\lambda_{\max} v|v) - (\phi(G)v|v) \geq 0$ pour tout v . En appliquant ce résultat à $v = \sum_{x \in X} v_x$ et en remarquant que $(\phi(G)v|v) \geq n\delta_G$, on obtient que $\lambda_{\max} \geq \delta_G$.

L'endomorphisme $\lambda_{\max} \text{Id} - \phi(G)$ est positif semi-défini. Soit $v \in \mathbb{R}^{X(H)}$. Alors :

$$((\lambda_{\max} \text{Id} - \phi(H))v|v) = ((\lambda_{\max} - \phi(G))v|v) \geq 0$$

Dans la deuxième égalité, on considère v comme un vecteur de \mathbb{R}^X en posant $v(x) = 0$ si $x \notin H$. Donc $\lambda_{\max} \text{Id} - \phi(H)$ est positif semi-défini donc $\mu_{\max} \leq \lambda_{\max}$. De même, l'endomorphisme $\phi(G) - \lambda_{\min} \text{Id}$ est positif semi-défini donc $\lambda_{\min} \leq \mu_{\min}$. \square

La preuve du théorème suivant est admise.

Théorème 5 (Entrelacement). *Soit H un sous-graphe induit de G . Soit $\{\lambda_i | 1 \leq i \leq n\}$ le spectre de G rangé en ordre décroissant et soit $\{\mu_i | 1 \leq i \leq m\}$ le spectre de H rangé en ordre décroissant. Alors :*

$$\forall 1 \leq i \leq m, \lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$$

6.2.3 Bipartition

Proposition 6.8. *Soit G un graphe biparti. Si $\lambda^{(i)} \in \text{Spec } G$, alors $-\lambda^{(i)} \in \text{Spec } G$. Soit G un graphe connexe tel que $-\Delta \in \text{Spec } G$. Alors G est régulier biparti.*

Démonstration. Soit G un graphe biparti et $X_1 \cup X_2$ une bipartition. Soit $v = \sum_{x \in X_1} \alpha_x v_x + \sum_{x \in X_2} \beta_x v_x$ un vecteur propre de G pour la valeur propre λ . Le vecteur $w = \sum_{x \in X_1} \alpha_x v_x - \sum_{x \in X_2} \beta_x v_x$ vérifie

$$\phi(G)w(x) = \sum_{y \sim x} w(y) = \pm \sum_{y \sim x} v(y) = \pm \lambda v(x) = \pm \mp \lambda w(x) = -\lambda w(x)$$

donc est vecteur propre pour la valeur propre $-\lambda$.

Soit G un graphe connexe tel que $-\Delta \in \text{Spec } G$. Nous savons déjà que G est régulier. Considérons un vecteur propre v pour la valeur propre $-\Delta$ de plus grande composante 1. Les ensembles X_+ et X_- des $x \in X$ tels que $v(x) = 1$ et $v(x) = -1$ réalisent alors une bipartition de G . \square

La preuve du théorème suivant est admise.

Théorème 6 (Bipartition générale). *Un graphe G est biparti si et seulement si $-\lambda_{\max}$ appartient à $\text{Spec } G$. Dans ce cas, son spectre est symétrique par rapport à zéro.*

7 Graphes hamiltoniens

Le rapporteur avoue n'en avoir pas fait entièrement le tour. (Alexandre Grothendieck).

7.1 Cycles hamiltoniens

Un graphe G possède un cycle hamiltonien s'il admet un cycle couvrant, c'est-à-dire un sous-graphe H qui soit un cycle avec $|H| = |G|$. De manière équivalente, un graphe est hamiltonien s'il existe un cycle passant par tous les sommets de G . Un graphe G possède un chemin hamiltonien s'il admet un chemin couvrant. Les graphes possédant un chemin hamiltonien, et donc les graphes hamiltoniens, sont connexes. Les graphes hamiltoniens sont 2-connexes.

Les graphes complets à au moins 3 sommets, les cycles, plus généralement les graphes circulants connexes, plus généralement les graphes de Cayley abéliens connexes (par exemple les cubes) sont hamiltoniens. Les graphes complets bipartis $K_{m,n}$ avec $m \neq n$ et le graphe de Petersen ne sont pas hamiltoniens.

Proposition 7.1. *Le graphe de Petersen n'est pas hamiltonien.*

Démonstration. Soit C un cycle de longueur maximale dans P . Alors $L(C) = C$ est un cycle induit de même longueur dans $L(P)$. D'après la proposition 6.5, le spectre de $L(P)$ rangé dans l'ordre décroissant est $\{4^{(1)}, 2^{(5)}, -1^{(4)}, -2^{(5)}\}$. D'après la proposition 6.4, le spectre de C_{10} est $\{2^{(1)}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}^{(2)}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}^{(2)}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}^{(2)}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}^{(2)}, -2^{(1)}\}$. La septième valeur de C_{10} est donc $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, qui est plus grand que la septième valeur propre -1 de $L(P)$. Les valeurs propres de C_{10} n'entrelacent donc pas les valeurs propres de $L(P)$. D'après le théorème 5 d'entrelacement fort, C n'est donc pas C_{10} . Donc P n'a pas de cycle couvrant. \square

Proposition 7.2. *Soit G un graphe de cardinal $n \geq 3$. Supposons que $\delta_G \geq n/2$. Alors G est hamiltonien.*

Démonstration. La plus petite composante connexe de G a au moins $n/2+1$ sommets, donc est G tout entier. Donc G est connexe. Soit $P = \{x_1, \dots, x_s\}$ un chemin maximal. Tous les voisins de x_1 et de x_s sont sur P . L'ensemble des voisins de x_s est de cardinal au moins $n/2$ et l'ensemble des prédécesseurs des voisins de x_1 est de cardinal au moins $n/2$. L'union de ces deux ensembles inclus dans $\{x_1, \dots, x_{s-1}\}$ est donc de cardinal au moins n . Donc leur intersection est non-vide. Donc le sous-graphe induit par les x_i contient un cycle C passant par tous les x_i . Par connexité de G et maximalité de P , il n'existe pas de sommet de G externe à P . Donc $s = n$. \square

Le lemme suivant est particulièrement utile dans l'étude des graphes sommets-transitifs.

Lemme 7.3. *Soit G un graphe pouvant s'écrire comme l'union disjointe de graphes $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ tous isomorphes et tous hamiltoniens. Supposons que les sommets $x_{i,j}$ et $x_{i,j+1}$ de H_i et H_{j+1} soient adjacents pour tout j (avec la convention que $n+1 = 1$). Alors G est hamiltonien.*

Démonstration. Si $n = 1$, alors $G = H_1$ donc est hamiltonien. Sinon, soit C_i un cycle hamiltonien de H_i . Sans perte de généralité, on peut supposer que $H_i = C_i$. Le chemin $(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, C_n)$ se termine sur un voisin $x_{2,n}$ de $x_{1,n}$ sur C_n . Le chemin $(x_{2,n}, x_{2,n-1}, C_{n-1})$ se termine sur $x_{k,n-1}$, l'autre voisin de $x_{1,n}$ sur H_{n-1} . Le sommet $x_{k,n-1}$ est voisin de $x_{k,n-2}$. En répétant ce processus, on arrive sur un voisin de $x_{1,1}$ et on termine par C_1 . Le chemin obtenu est un cycle hamiltonien de G . \square

Corollaire 7.4. *Le n -cube est hamiltonien pour $n \geq 2$.*

Démonstration. Le 2-cube est un cycle donc est hamiltonien. Par définition, le $(n+1)$ -cube est l'union de deux copies du n -cube reliées sommets à sommets. C'est donc l'union de deux graphes hamiltoniens isomorphes reliés sommets à sommets. \square

Soit $G = (X, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}$. Le graphe G^k est le graphe $(X, \{x, y \mid d_G(x, y) \leq k\})$. Le graphe G^0 est donc le graphe isolé et G^1 est égal à G .

Proposition 7.5. *Si P est un chemin de cardinal supérieur à 3, alors P^2 est hamiltonien. Si G est connexe et $|G| \leq 3$, alors G^3 est hamiltonien.*

Démonstration. Si $|P|$ est pair, alors le cycle

$$(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, x_{2n}, x_{2n-2}, \dots, x_2, x_1)$$

convient. Sinon, $(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n-2}, \dots, x_2, x_1)$ convient.

Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de la montrer pour un arbre couvrant T de G . Une branche de T est un sous-graphe de T induit par des sommets de degrés 1 ou 2 dans T . Une feuille est une branche donc T admet des branches donc T admet une branche maximale $L = (x_1, \dots, x_\ell)$. Si $T = L$, alors T est un chemin donc T^2 est hamiltonien donc T^3 est hamiltonien. Sinon, $x = x_1 \in L$ a un voisin y dans T qui est de degré au moins 3 dans T . Le graphe $T_1 = T - L$ est acyclique et l'unique chemin de $a \in T_1$ à $b \in T_1$ dans T est un chemin de T_1 , donc T_1 est connexe. Donc T_1 est un arbre ayant au moins 3 sommets. Par récurrence, on peut supposer que T_1^3 admet un cycle hamiltonien C .

Soit y a un voisin z sur C tel que $d_T(z, y) \leq 2$. Alors $d_T(x, z) \leq 3$ donc

$$(y, x_2, \dots, x, z, \dots, y)$$

est un cycle hamiltonien de T^3 . Soit les deux voisins z_1 et z_2 de y sur C sont à distance 3 de y . Dans ce cas, on nomme T_{z_i} la composante connexe de z_i dans $T_1 - \{y\}$. Si w est un sommet de T_{z_i} qui n'est pas sur l'unique chemin de z_1 à z_2 dans T , alors tous les sommets à distance au plus 3 de w sont dans T_{z_i} . Donc les voisins de w sur C sont dans T_{z_i} . Soit P le chemin de z_1 à z_2 sur C qui ne passe pas par y . Soit t le dernier sommet de P qui est dans T_{z_1} . D'après ce que nous venons de voir, t_1 est à distance au plus 2 de y . Son unique voisin t' sur C qui n'est pas dans T_{z_1} est donc à distance au plus 2 de y et l'un des deux sommets t, t' est à distance 1 de y . Renommons t_1 l'un des deux sommets t, t' à distance 1 de y . Le cycle $(t_1, x_2, \dots, x, t_2, \dots, t_1)$ est alors un cycle hamiltonien de T^3 . \square

7.2 Deux classes de graphes hamiltoniens

Théorème 7. *Soit G un graphe de cardinal au moins 3. Soit $\alpha(G)$ le cardinal du plus grand sous-ensemble de X dont le sous-graphe induit est isolé. Supposons que la connectivité $\kappa(G)$ de G soit plus grande que $\alpha(G)$. Alors G est hamiltonien.*

Démonstration. Soit G un graphe κ -connexe et soit C un cycle de longueur maximale de G dont nous notons $\{v_s\}_{1 \leq s \leq m}$ les sommets dans un ordre cyclique fixé. Supposons que $|C| < |G|$. Il existe alors un sommet $x \in X$ externe à C . D'après le théorème de Menger, il existe au moins $\kappa(G)$ chemins distincts de x à C . Notons $I \subset \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des indices de leurs extrémités sur C . Si $i \in I$, alors $i + 1 \notin I$ par maximalité de C . Pour la même raison, il n'existe pas de paires d'indices i et j dans I telle que $v_{i+1} \sim v_{j+1}$. Il s'en suit que $\{v_{i+1} | i \in I\} \cup \{x\}$ induit un sous-graphe isolé. Donc $\alpha(G) > \kappa(G)$. \square

La conjecture suivante est un des problèmes ouverts les plus importants de la théorie algébrique des graphes.

Conjecture 7.6. *Le seul graphe de Cayley connexe non hamiltonien est K_2 .*

Théorème 8. *Les graphes de Cayley abéliens connexes sauf K_2 sont hamiltoniens.*

Démonstration. Soit $G = (\Gamma, S)$ un graphe de Cayley connexe avec Γ commutatif et $|G| > 2$. Si $x \sim_G y$, alors $x - y \in S$. On se permettra donc d'identifier les arêtes de G avec des éléments de S .

Supposons tout d'abord que $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Le graphe G étant connexe, il n'est pas l'union disjointe de sommets ou d'arêtes isolées. Il est donc au moins 2-régulier. D'après la proposition 7.2, il est donc hamiltonien.

Supposons maintenant que $\Gamma = \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ avec p impair ou $\alpha > 2$. L'ensemble S engendre $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ donc contient un générateur s de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Donc G contient un cycle formé de la répétition de l'arête s .

D'après le théorème 13 de structure des groupes finis commutatifs, on peut désormais supposer que Γ s'écrit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ou $\Gamma_1 = \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ avec p impair ou $\alpha > 2$. Soit G_1 le groupe $(\Gamma_1, S \bmod \Gamma_2 - \{0\})$. L'ensemble S engendre Γ donc $S_1 = S \bmod \Gamma_2 - \{0\}$ engendre Γ_1 . Donc G_1 est connexe. Donc il est hamiltonien. Soit $\{e_i \in S_1 | 1 \leq i \leq |\Gamma_1|\}$ l'ensemble ordonné des arêtes d'un cycle hamiltonien de G_1 . Soit $\{f_i \in S | 1 \leq i \leq |\Gamma_1|\}$ un ensemble ordonné de relèvement des e_i à S . On appelle C_e le plus long chemin formé par la répétition des f_i dans l'ordre et contenant $(0, 0)$. L'ensemble Γ étant un groupe, C_1 est un cycle.

Si $C_e = G$, alors G est hamiltonien. Sinon, il existe $g \in \Gamma$ n'appartenant pas à C_e . Soit C_g le plus long chemin formé par la répétition des f_i dans l'ordre et contenant $(0, 0)$. Le graphe G s'écrit alors comme l'union disjointe des C_g . Le graphe G est connexe donc il existe $g \neq g'$ et une arête a entre $x_g \in C_g$ et $x_{g'} \in C_{g'}$. Le graphe G étant sommet-transitif, il existe une numérotation des C_g telle que C_i et C_{i+1} soient reliés par une arête a pour tout i . Les cycles C_i ayant tous les mêmes arêtes, pour tout sommet $x_i \in C_i$, il existe une arête a de x_i à x_{i+1} . D'après le lemme 7.3, le graphe G est donc hamiltonien. \square

8 Coloration

*Sabi wa ku no hiro*³. (Matsuo Basho).

8.1 Généralités

Soit $G = (X, E)$ un graphe. Un stable est un sous-ensemble $S \subset X$ tel que le sous-graphe induit par S soit isolé. Une clique est un sous-ensemble $S \subset X$ tel que le sous-graphe induit par S soit complet. Le graphe G admet un stable et une clique. Un stable de G est une clique de \bar{G} et réciproquement. On appelle stabilité et on note $\alpha(G)$ le cardinal du plus grand stable de G et on appelle nombre de clique et on note $\omega(G)$ le cardinal de la plus grande clique de G .

Une coloration de G en k couleurs est une partition de X en k sous-ensembles $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ telle que chaque X_i soit un stable. Un graphe est dit k -coloriable s'il existe une coloration de G en k couleurs. Le graphe G est $|G|$ -coloriable. Le nombre de coloration $\chi(G)$ de G est le plus petit entier k tel que G soit k -coloriable. Les graphes 1-coloriables sont les graphes isolés; les graphes 2-coloriables sont les graphes bipartis. La propriété d'être k -coloriable est connexe-ascendante et fortement connexe-descendante; elle est donc vraie pour G si et seulement si elle est vraie pour toutes les composantes connexes de G , si bien que l'on peut se ramener au cas des graphes connexes lorsque l'on étudie les problèmes de coloration.

Proposition 8.1. *Soit G un graphe de cardinal n . Alors :*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \max\{\delta_H | H \subset G\} + 1 \leq \Delta_G + 1$$

Démonstration. La première et la dernière inégalités résultent directement de la définition. Pour démontrer la deuxième, on considère une coloration de G construite de la manière suivante. On choisit $v_n \in X$ parmi les sommets de degré minimal. Si v_1, \dots, v_n sont supposés choisis, on prend v_{i-1} parmi les sommets de degré minimal de $G - \{v_1, \dots, v_n\}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on assigne ensuite v_i à la première classe C_s ne contenant aucun des voisins de v_i dans le sous-graphe H_i de G induit par $\{v_1, \dots, v_i\}$. Cette procédure requiert au maximum $\delta_{H_i} + 1$ couleurs à chaque étape. \square

On remarque que ces inégalités sont les meilleurs possibles, puisqu'elles deviennent des égalités lorsque G est un cycle impair ou un graphe complet. Inversement, les graphes de Mycielski montrent que l'on peut rendre arbitrairement grand la différence entre $\omega(G)$ et $\chi(G)$. La preuve du théorème suivant est admise (et il ne sera pas utilisé dans le cours).

Théorème 9 (Brooks 1941). *Soit G un graphe qui n'est ni complet ni un cycle impair. Alors $\chi(G) \leq \Delta_G$.*

Une coloration de E en k couleurs est une partition de E en k sous-ensembles $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ telle que si $e \in E_i$, alors e n'est incidente à aucune arête de E_i . Un graphe

³Les poèmes sont colorés par le passage du temps

est dit k -arête-coloriable s'il existe une coloration de E en k couleurs. Le graphe $|G|$ est $|E|$ -coloriable. Le nombre d'arête-coloration $\chi'(G)$ est le plus petit entier k tel que G soit k -arête-coloriable. Alternativement, il s'agit de $\chi(L(G))$. Le nombre d'arête-coloration de G est plus grand que Δ_G .

Proposition 8.2. *Soit G un graphe biparti. Alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|E|$. Le résultat est vrai si $|E| = 0$. Supposons maintenant $|E| = m > 0$ et que la proposition soit vraie pour les graphes bipartis ayant moins d'arêtes. Soit Δ le degré maximal de G . Soit $e = (x, y)$ une arête. Considérons une Δ -coloration de $G - e$. Dans $G - e$, les sommets x et y sont de degré au plus $\Delta - 1$ donc il existe deux couleurs α et β telles qu'aucune arête incidente à x ne soit dans C_α et aucune arête incidente à y ne soit dans C_β . Si on peut choisir $\alpha = \beta$, on peut assigner e à C_α et $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. Sinon, il existe une arête e_1 incidente à x de couleur β et une arête incidente à y de couleur α . Soit P le plus long circuit de G contenant e_1 et tel que les arêtes de P sont dans $C_\alpha \cup C_\beta$. Dans le sous-graphe induit par les sommets de P , les sommets sont de degré 2 au plus et x est de degré 1 donc P est un chemin. Le graphe G ne contient pas de cycle impair donc tout chemin de x à y est de longueur impaire. Donc P ne passe par y . Soit z le dernier sommet de P . Par maximalité, il existe $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ tel qu'aucune arête incidente à z soit de couleur γ . Recolorions G en échangeant α et β sur toutes les arêtes de P . Ceci produit bien une coloration de G . Maintenant, on peut choisir $\alpha = \beta$ et donc $\chi'(G) \leq \Delta_G$. \square

Proposition 8.3. *Le graphe de Petersen vérifie $\chi'(P) = 4$.*

Démonstration. Il est aisé de colorer les arêtes de P en 4 couleurs. Nous montrons donc que $\chi'(P) > 3$. Soit une coloration des arêtes de P en 3 couleurs C_1, C_2, C_3 . Le C_5 externe de P est un cycle impair donc n'est pas 2-coloriable donc les trois couleurs C_i sont présentes. Soit (x, y) une arête colorée de C_i . Les arêtes (x, x') et (y, y') vers le C_5 interne ne sont alors pas dans C_i . Donc le C_5 interne contient une arête incidente à x' de C_i . Cette arête n'est pas (x', y') car $x' \approx y'$ donc il existe une autre arête du C_5 interne incidente à y' de C_i . Donc C_5 a au moins 6 arêtes. Contradiction. \square

Corollaire 8.4. *Le graphe de Petersen n'est pas hamiltonien.*

Démonstration. Soit C un cycle couvrant de P . C'est un cycle pair donc ses arêtes sont 2-coloriables. De chaque sommet de P part une unique troisième arête. Colorions là en une troisième couleur. Ceci produit une 3-coloration des arêtes de P , en contradiction avec la proposition précédente. \square

8.2 Perfection

Nous avons vu que pour tout graphe G , le nombre de coloration $\chi(G)$ est supérieur au nombre de clique $\omega(G)$. Un graphe G est dit parfait si et seulement si $\chi(G) = \omega(G)$ et si $\chi(H) = \omega(H)$ pour tout sous-graphe induit de G .

Lemme 8.5. *La propriété d'être parfait est connexe-ascendante et fortement connexe-descendante. Les graphes 2-coloriables sont parfaits.*

Démonstration. Supposons toutes les composantes connexes de G parfaites. Soit H un sous-graphe induit de G . Le graphe H est une union disjointe de sous-graphes induits H_i des composantes connexes de G . Pour chacun de ces sous-graphes $\chi(H_i) = \omega(H_i)$ donc $\chi(H) = \max \chi(H_i) = \max \omega(H_i) = \omega(H)$. Donc G est parfait. Si G est parfait et si C est une composante connexe de G , alors tout sous-graphe induit de C est un sous-graphe induit de G donc C est parfait.

Les graphes de nombre chromatique 1 sont les graphes isolés. Ils sont effectivement parfaits. Les graphes de nombre chromatique 2 sont les graphes bipartis qui ne sont pas isolés. Un sous-graphe induit d'un graphe biparti est biparti donc isolé ou de nombre chromatique 2. Dans les deux cas, c'est bien le cardinal de la plus grande clique. \square

En vertu de la première assertion du lemme précédent, on peut se ramener au cas des graphes connexes pour étudier la perfection.

Proposition 8.6. *Soit G un graphe. Tout sous-graphe induit H de G contient un stable A tel que $\omega(H - A) < \omega(H)$ si et seulement si G est parfait.*

Démonstration. Supposons G parfait et soit H un sous-graphe induit de G . Soit $A = C_1$. Alors $\omega(H - A) = \chi(H - A) = \chi(H) - 1 < \chi(H) = \omega(H)$. Réciproquement, supposons que tout sous-graphe induit H de G contient un stable A tel que $\omega(H - A) < \omega(H)$ et raisonnons par récurrence sur $|H|$. Si $|H| = 1$, alors $\omega(H) = \chi(H)$. Supposons que $\chi(H) = \omega(H)$ pour tout sous-graphe induit de cardinal inférieur à $n > 0$. Soit H un sous-graphe induit de cardinal $n + 1$. Posons $C_1 = A$. Alors $\omega(H - A) = \chi(H - A) < \omega(H)$. Donc $\chi(H - A) + 1 \leq \omega(H)$ et donc $\chi(H) = \omega(H)$. Donc G est parfait. \square

Corollaire 8.7. *Soit G un graphe tel que $\alpha(H)$ soit égal au nombre de cliques maximales de H pour tout sous-graphe induit H . Alors G est parfait.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer G connexe. Soit u un sommet de degré maximal et soit v un voisin de u . Soit w un voisin de v et x un voisin de u . Soit H le sous-graphe induit par uvw . Alors $\alpha(H) < 3$ donc H contient au plus 2 cliques maximales donc ses cliques maximales ne sont pas des K_2 . Il y a donc un K_3 dans H . Si $u \not\sim_G w$, alors $v \sim_G x$ donc $d_G(v) > d_G(u)$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc $u \sim_G w$. Donc u est voisin de tous les sommets de G . Donc u appartient à toutes les cliques maximales de G . Donc $\omega(G - \{u\}) < \omega(G)$. Donc G est parfait. \square

Les graphes vérifiant les hypothèses de la proposition précédente sont appelés les graphes trivialement parfaits.

Un graphe G est dit triangulé si et seulement si K_3 est le seul cycle induit possible de G .

Lemme 8.8 (Induction structurelle sur les graphes triangulés). *La classe des graphes triangulés est définie par induction structurelle de la manière suivante. Objets initiaux : les graphes complets. Opérations : Soit G_1 et G_2 triangulés. Alors $G = G_1 \cup G_2$ et $G_1 \cap G_2$ est vide ou un graphe complet.*

Démonstration. Appelons pour cette preuve les graphes complets ou bien s'écrivant $G = G_1 \cup G_2$ avec G_1 et G_2 triangulés d'induction et avec $G_1 \cap G_2$ vide ou un graphe complet les graphes triangulés d'induction.

Les graphes complets sont triangulés. Soit G s'écrivant $G = G_1 \cup G_2$ avec G_1 et G_2 triangulés et avec $G_1 \cap G_2$ un graphe complet. Soit C un cycle induit de G . Alors C est contenu dans G_1 ou G_2 . Donc C est un K_3 . Donc G est triangulé. Donc les graphes triangulés d'induction sont triangulés.

Réciproquement, supposons que tous les graphes triangulés de cardinal n soient triangulés d'induction et soit G un graphe triangulé avec $|G| = n + 1$. Si G est non-connexe, c'est une union disjointe de graphes triangulés d'induction, donc de graphes triangulés. Donc il est triangulé. Si G est complet, il est triangulé d'induction. Sinon, soit u et v deux sommets non-adjacents et soit S un ensemble minimal séparant u de v . Soit C la composante connexe de u . Soit G_1 le sous-graphe de G induit par les sommets de C et par les sommets de S . Soit G_2 le sous-graphe de G induit par les sommets qui ne sont pas dans C . Les graphes G_1 et G_2 sont des sous-graphes induits de G donc sont triangulés. Ce sont des sous-graphes stricts donc ils sont triangulés d'induction. De plus, $G_1 \cup G_2$ est égal à G et $G_1 \cap G_2 = S$. Soit x et y deux éléments de S . Il existe un cycle contenant u, v, x, y donc un cycle de longueur minimale contenant des sommets de G_1 , des sommets de G_2 ainsi que x, y . Ce cycle est induit, donc il s'agit d'un K_3 . Donc il existe une arête entre x et y . Donc S est complet. Donc G est triangulé d'induction. \square

Théorème 10. *Les graphes triangulés sont parfaits.*

Démonstration. Soit G un graphe triangulé. Sans perte de généralité, on peut le supposer connexe. Si G est complet, il est parfait. Sinon, il s'écrit $G_1 \cup G_2$ avec G_1 et G_2 triangulés et $S = G_1 \cap G_2$ complet. Sans perte de généralité, on peut supposer G_1 et G_2 parfaits. Soit H un sous-graphe induit de G et soit H_1 et H_2 les sous-graphes de G_1 et G_2 induits par les sommets de H . Les graphes H_i sont coloriables avec $\omega(H_i)$ couleurs. Si $H_1 \cap H_2$ est vide, alors H est coloriable avec $\max \omega(H_i)$ couleurs donc $\chi(H) \leq \omega(H)$. Sinon $H_1 \cup H_2$ est un sous-graphe induit de S donc est complet. Quitte à permuter les classes de couleur si nécessaire, une coloration des H_i s'étend à une coloration de H . Donc $\chi(G) \leq \omega(H)$. Donc G est parfait. \square

Théorème 11. *Soit G un graphe. Le graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G , l'inégalité*

$$|H| \leq \alpha(H)\omega(H) \tag{1}$$

est vérifiée.

Démonstration. Si G est parfait et si H est un sous-graphe induit, on peut le colorer en $\omega(H)$ couleurs. Chacune classe de couleur est un stable de H donc a moins de $\alpha(H)$ sommets. Donc $|H|$ est plus petit que $\alpha(H)\omega(H)$.

Supposons réciproquement que G ne soit pas parfait. Sans perte de généralité, on peut supposer que tout sous-graphe induit strict de G est parfait. Soit S un stable non-vidé de G . Le graphe $G - S$ est parfait donc $\chi(G - S) = \omega(G - S)$. Si $\chi(G - S) < \omega(G)$, alors une coloration minimale de $G - S$ s'étend en une coloration de G en $\chi(G - S) + 1 \leq \omega(G)$ couleurs donc G est parfait. Nous savons donc que $\chi(G - S) = \omega(G - S) = \omega(G)$ pour tout stable de G . Soit en particulier $C_0 = \{s_1, \dots, s_\alpha\}$ un stable de taille $\alpha(G)$. Pour $1 \leq i \leq \omega(G)$ et $1 \leq j \leq \alpha$, soit $C_{i,j}$ la classe de la couleur i dans une coloration minimale fixée de $G - \{s_j\}$. Les sommets d'un $C_{i,j}$ forment donc un stable. Les $C_{i,j}$ et C_0 forment donc $\alpha(G)\omega(G) + 1$ stables.

Soit K une clique maximale fixée de G . Si $K \cap C_0$ est vide, alors, pour tout $1 \leq j \leq \alpha$, K est une clique de $G - \{s_j\}$ donc est colorée par toutes les couleurs de notre coloration fixée de $G - \{s_j\}$. Donc $K \cap C_{i,j} \neq \emptyset$. Si $K \cap C_0 \neq \emptyset$, alors $K \cap C_0 = \{s_\ell\}$. Donc K est une clique de $G - \{s_i\}$ pour $j \neq \ell$ donc $K \cap C_{i,j} \neq \emptyset$ pour tout i et tout $j \neq \ell$. Si $j = \ell$, la clique $K - \{s_\ell\}$ est colorée par toutes les couleurs de la coloration fixée de $G - \{s_\ell\}$ sauf exactement une donc il existe exactement un i tel que $K \cap C_{i,\ell} = \emptyset$. Finalement, il existe un unique ensemble C parmi les éléments $C_0, C_{1,1}, \dots, C_{\omega(G),\alpha(G)}$ tel que $K \cap C = \emptyset$ et lorsque $K \cap C \neq \emptyset$, alors $K \cap C$ est de cardinal 1.

Si $C = C_0$ ou $C = C_{i,j}$, alors $\omega(C) = \omega(G)$. Choisissons une numérotation des sommets de G et une numérotation des $\alpha(G)\omega(G) + 1$ stables $C_0, C_{1,1}, \dots, C_{\omega(G),\alpha(G)}$. Soit $K_i \subset G - C_i$ une clique maximale fixée. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille $(\alpha(G)\omega(G) + 1) \times |G|$ dont les coefficients sont nuls sauf si le sommet j appartient à C_i auquel cas $a_{ij} = 1$. Soit $B = (b_{ij})$ la matrice de taille $|G| \times (\alpha(G)\omega(G) + 1)$ dont les coefficients sont nuls sauf si le sommet i appartient à K_j auquel cas $b_{ij} = 1$. Calculons AB . L'entrée ij de AB compte le nombre de sommets k qui appartiennent à la fois au stable C_i et à la clique K_j . Il n'y en a pas par définition de K_j si $i = j$. Sinon, $K_j \cap C_i \neq \emptyset$ et est de cardinal 1. Donc AB est la matrice $J - \text{Id}$ donc est de rang n . Donc A et B sont de rang au moins n donc $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq n$. Donc G ne vérifie pas l'hypothèse (1). \square

Corollaire 8.9. *Un graphe G est parfait si et seulement si \bar{G} est parfait.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si G est parfait, alors \bar{G} est parfait. Supposons donc G parfait. Soit H un sous-graphe induit de \bar{G} . Alors \bar{H} est un sous-graphe induit de G donc $|H| = |\bar{H}| \leq \alpha(\bar{H})\omega(\bar{H}) = \omega(H)\alpha(H)$. Donc \bar{G} est parfait d'après le théorème. \square

9 Morphismes

I hear it in the deep heart's core. (William Yeats).

9.1 Définitions

Un morphisme de graphes f de $G_1 = (X_1, E_1)$ dans $G_2 = (X_2, E_2)$ est une application de X_1 dans X_2 qui envoie un élément de E_1 sur un élément de E_2 . De manière équivalente : $x \sim_{G_1} y$ implique $f(x) \sim_{G_2} y$. Ceci implique en particulier que deux sommets adjacents de G_1 sont envoyés sur deux sommets distincts de G_2 . Un morphisme n'est ni nécessairement injectif, ni nécessairement surjectif. L'ensemble des $x \in X(G_1)$ tel que $f(x) = y \in X(G_2)$ est appelé la fibre de f au-dessus y . Une fibre est un stable.

L'ensemble des morphismes de G_1 dans G_2 est noté $\text{Mor}(G_1, G_2)$. Il contient $\text{Hom}(G_1, G_2)$. Si $f \in \text{Mor}(G_1, G_2)$ et $g \in \text{Mor}(G_2, G_3)$, alors $g \circ f \in \text{Mor}(G_1, G_3)$. On note $\text{End}(G)$ l'ensemble $\text{Mor}(G, G)$. C'est un monoïde pour la composition.

Lemme 9.1. *L'image d'un graphe connexe est connexe.*

Démonstration. Cela résulte du fait que f préserve l'adjacence. □

Lorsque $\text{Mor}(G_1, G_2)$ est non-vide, on écrit $G_1 \longrightarrow G_2$. Lorsque $G_1 \longrightarrow G_2$ et $G_2 \longrightarrow G_1$, on écrit $G \equiv G_2$.

Proposition 9.2. *La relation \equiv est une relation d'équivalence.*

Démonstration. L'identité est un élément de $\text{Mor}(G, G)$ donc $G \equiv G$. Si $G \equiv H$, alors $G \longrightarrow H$ et $H \longrightarrow G$ donc $H \equiv G$. Si $G \equiv H$ et $H \equiv U$, alors $G \longrightarrow H$ et $H \longrightarrow U$. En composant deux morphismes de $\text{Mor}(G, H)$ et $\text{Mor}(H, U)$, on obtient un morphisme de G vers U . Donc $G \longrightarrow U$. La même démonstration en échangeant G et U montre que $U \longrightarrow G$. Donc $G \equiv U$. □

Si $G \equiv H$, il existe $f \in \text{Mor}(G, H)$ et $g \in \text{Mor}(H, G)$. Donc $g \circ f \in \text{End}(G)$. Lorsque de plus il existe de tels f et g vérifiant $g \circ f = \text{Id}$, on dit que G est une rétraction de H et on note $G \hookrightarrow H$. La relation \hookrightarrow , être une rétraction, est réflexive et transitive mais n'est pas symétrique. Si G est une rétraction de H et si f et g sont comme dans la définition d'une rétraction, alors $f(G)$ est un sous-graphe de H isomorphe à G par g . C'est donc un sous-graphe induit. Si l'on identifie G et $f(G)$, la restriction de g à G devient l'identité. Un élément de la classe d'équivalence de G ayant un nombre minimum de sommets est appelé un coeur⁴ de G .

Proposition 9.3. *Les coeurs de G sont tous isomorphes. Le graphe C est un coeur si et seulement si $\text{End}(C) = \text{Aut}(C)$. Un coeur de G est une rétraction de G .*

Démonstration. Soit C_1 et C_2 deux coeurs de G . Alors $C_1 \equiv C_2$ donc il existe $f \in \text{Mor}(C_1, C_2)$ et $g \in \text{Mor}(C_2, C_1)$. La composée $g \circ f$ est un endomorphisme de C_1 ; soit C son image. C'est un sous-graphe induit de C_1 . De plus $g \circ f$ appartient à $\text{Mor}(C_1, C)$,

⁴En Anglais, core.

donc $C_1 \longrightarrow C$, et l'inclusion appartient à $\text{Mor}(C, C_1)$, donc $C \longrightarrow C_1$. Donc $C \equiv C_1$ donc $|C| = |C_1|$ et $g \circ f$ est une bijection. Donc f est une injection et g est une bijection de $f(C_1)$ sur C_1 . L'arête $(x, y) \in E(C_1)$ est transformée par f en une arête $(f(x), f(y)) \in E(C_1)$ et $(u, v) \neq (x, y)$ est transformée en $(f(u), f(v)) \neq (f(x), f(y))$. Donc le sous-graphe C_3 induit dans C_2 par les sommets de $f(C_1)$ a plus d'arêtes que C_1 . Donc $g(C_3) = C$ a plus d'arêtes que C_1 ; étant par ailleurs un sous-graphe de C_1 , il lui est égal. Donc $C = C_1$ et $g \circ f$ est un automorphisme de C_1 . Les applications f et g sont alors également des bijections. Si $f(x) \sim_{C_2} f(y)$, alors $g \circ f(x) \sim_{C_1} g \circ f(y)$ donc $x \sim_{C_1} y$. Donc f est un isomorphisme de C_1 vers C_2 .

Si f appartient à $\text{End}(C)$, alors $f(C)$ est un sous-graphe de C donc est dans la classe d'équivalence de C . D'après la première assertion, f est donc un automorphisme. Réciproquement, si $G \equiv H$, alors $G \longrightarrow H \longrightarrow G$ est un endomorphisme de G . Si tous les endomorphismes de G sont des automorphismes, appliquer cette propriété au coeur de G montre que G est un coeur.

D'après l'assertion précédente, il existe $f \in \text{Mor}(C, G)$ et $g \in \text{Mor}(G, C)$ tels que $g \circ f \in \text{End}(C) = \text{Aut}(C)$. Composer avec g avec l'inverse de $g \circ f$ produit les deux morphismes de la définition d'une rétraction. \square

Corollaire 9.4. *Le coeur d'un graphe connexe est connexe. Le coeur d'un graphe sommet-transitif est un graphe connexe.*

Démonstration. Soit x et y deux sommets du coeur d'un graphe connexe G . Dans G , il existe un chemin de x à y . L'image de ce chemin par la rétraction de G à C est un chemin de x à y .

Soit G un graphe sommet-transitif et C sa composante connexe de cardinal maximal. Soit C_i une composante connexe de G et x un sommet de C_i . Il existe $\sigma_i \in \text{Aut}(G)$ tel que $\sigma_i(x)$ appartienne à C . Alors $\sigma_i(C_i) \subset C$. L'application qui envoie x sur $\sigma_i(x)$ est un morphisme de G vers C . Donc $G \equiv C$. Il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer que G est connexe. Son coeur est alors un graphe connexe. \square

Exemples : Les graphes complets sont des coeurs. Le coeur du cycle pair C_{2n} est l'arête isolée K_2 . Soit G le graphe formé par l'union disjointe de $M(M(K_2))$ et de K_3 (voir la sous-section 11.6 pour la notation $M(\cdot)$). Alors G est un coeur non-connexe.

Proposition 9.5. *Le coeur C d'un graphe G sommet-transitif est sommet-transitif. Le cardinal de la fibre d'un morphisme f de G vers C au-dessus de $x \in X(C)$ ne dépend pas de x . De plus, $|C| \mid |G|$.*

Démonstration. Soit G un graphe sommet-transitif et C son coeur. C'est une rétraction donc il existe un morphisme f de C vers G et un morphisme g de G vers C dont la composée est l'identité. Nous identifions C avec le sous-graphe induit $f(C)$, ce qui identifie g avec l'identité. Soit x et y deux sommets de C . Il existe un automorphisme σ de G tel que $\sigma(x) = y$. La composée de σ et de g est un endomorphisme, donc un automorphisme, de C qui envoie x sur y .

Soit $x \in X(G)$ et $y = \tau(x)$ un autre sommet de G . S'il existe un $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tel que $x \in \sigma(C)$, alors $y \in \tau\sigma(C)$. Le cardinal $N \neq 0$ de l'ensemble des σ tel que $x \in \sigma(C)$ ne dépend donc pas de x . Considérons maintenant la fibre $F(z)$ d'un morphisme

$f \in \text{Mor}(G, C)$ au-dessus de $z \in X(C)$. Le morphisme f induit un isomorphisme de $\sigma(C)$ vers C pour tout $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Donc l'intersection $F(z) \cap \sigma(C)$ est un singleton pour tout σ . Si l'on énumère les $F(z) \cap \sigma(C)$ pour tout $\sigma \in \text{Aut}(G)$, on compte N fois chaque sommet de $F(z)$. Le cardinal de $F(z)$ est donc $|\text{Aut}(G)|/N$. Il est donc indépendant de z . Le graphe G est l'union des fibres au-dessus des sommets de C donc $|C||G|$. \square

Corollaire 9.6. *Un graphe sommet-transitif ayant un nombre premier de sommets et au moins une arête est son propre coeur.*

Démonstration. En effet, le sommet isolé n'est pas le coeur d'un graphe ayant au moins une arête. \square

9.2 Lien avec la coloration

Soit G un graphe k -coloriable. Une coloration de G induit alors un morphisme de G vers K_k envoyant $x \in C_i$ sur le sommet $i \in K_k$. Réciproquement, un morphisme de G vers K_n induit, en prenant les fibres, une coloration de G en n couleurs. En particulier, si $G \rightarrow H$, alors $\chi(G) \leq \chi(H)$ et le nombre chromatique est constant dans la classe d'équivalence d'un graphe. Les graphes complets étant des coeurs, un graphe G vérifie $K_n \rightarrow G$ si et seulement si G contient une clique de taille n . Donc, si $G \rightarrow H$, alors $\omega(G) \leq \omega(H)$ et le nombre de clique est constant dans une classe d'équivalence. Un graphe vérifie $\chi(G) = \omega(G)$ si et seulement si son coeur est $K_{\chi(G)}$. Un graphe est donc parfait si et seulement si le coeur de tout sous-graphe induit est un K_n .

Proposition 9.7. 1. *Le coeur d'un graphe G biparti ayant au moins une arête est K_2 .*

2. *Les cycles impairs sont des coeurs.*

3. *Le graphe de Petersen est un coeur.*

4. *$M(M(K_2))$ est un coeur.*

5. *L'union disjointe de $M(M(K_2))$ et de K_3 est un coeur non-connecté.*

1. En effet, $G \rightarrow K_2$ et $K_2 \rightarrow G$.

2. Soit C un cycle impair. Alors $\chi(C) = 3$ et tout sous-graphe induit strict de C vérifie $\chi(C) \leq 2$. Donc C est un coeur.

3. Soit P le graphe de Petersen et C son coeur. Le graphe P est sommet-transitif donc C est un graphe connexe sommet-transitif, donc régulier, et $|C| \mid 10$. Le graphe P contient une arête donc $|C| \neq 1$. Il n'est pas biparti donc $C \neq K_2$ donc $|C| \neq 2$. Supposons $|C| = 5$. Alors C est régulier d'ordre $k > 0$ pair. Il n'y a pas de 5-cliques dans P donc $C \neq K_5$ donc $k \neq 4$. Donc $k = 2$ donc C est le cycle C_5 et la fibre au-dessus de $z \in C_5$ de $f : P \rightarrow C$ est de cardinal 2, disons $\{x, y\}$. Les sommets x et y de P sont sur un même 5-cycle Γ . La restriction de f à Γ est un isomorphisme donc $f(x) \neq f(y)$. Contradiction. Donc $|C| = 10$ et $P = C$.

4. Soit H un sous-graphe induit de $M(M(K_2))$. Alors $\chi(H) \leq 3$. Donc il n'existe pas de morphismes de $M(M(K_2))$ vers H .
5. Soit G l'union disjointe de $M(M(K_2))$ et de K_3 . Soit $f \in \text{End}(G)$. Il n'y a pas de morphisme de K_3 vers $M(M(K_2))$ car $\chi(K_3) < \chi(M(M(K_2)))$ ni de $M(M(K_2))$ vers K_3 car $\omega(M(M(K_2))) < \omega(K_3)$. Donc f envoie $M(M(K_2))$ et K_3 sur eux-mêmes. Comme ces deux graphes sont des coeurs, f induit un automorphisme de chacun d'entre eux, et donc un automorphisme de G . Donc G est un coeur.

10 Planarité

Education doesn't change life much. It just lifts trouble to a higher plane of regard.
(Robert Frost).

10.1 Dessins, multigraphes, planarités

Un dessin (X, C) de \mathbb{R}^2 est la donnée d'un ensemble X fini de points distincts de \mathbb{R}^2 et d'un ensemble fini $C \subset \{f_i(x, y, \cdot) \mid i \in \mathbb{N}, (x, y) \in X^2\}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 telles que $f_i(x, y, \cdot)$ soit continue, linéaire par morceaux avec $f_i(x, y, 0) = x$ et $f_i(x, y, 1) = y$ ou bien $f_i(x, y, 0) = y$ et $f_i(x, y, 1) = x$. Un dessin est dit plan si et seulement si les seuls points de \mathbb{R}^2 dans l'image à la fois de $f_i(x, y, \cdot)$ et $f_j(x', y', \cdot)$ sont les points de X . On appelle l'image d'une fonction de C une ligne brisée. Lorsqu'il existe $f_i(x, y, \cdot) \in C$ avec $i > 0$, on dit que (X, C) a une ligne brisée multiple (entre x et y). Lorsqu'il existe $f_i(x, x, \cdot) \in C$, on dit que (X, C) a une boucle.

Un multigraphe (X, C) est la donnée d'un ensemble fini X et d'un sous-ensemble fini $E \subset \{(x, y)_i \mid i \in \mathbb{N}, (x, y) \in X^2\}$. A la différence d'un graphe, on permet donc dans un multigraphe les arêtes multiples ainsi que le fait qu'un sommet soit joint à lui-même.

A un dessin $D = (X, C)$ sans ligne brisée multiple et sans boucle est associé un graphe $G = (X, E)$ donné par $e \in X \times X$ si et seulement si $f_0(x, y, \cdot)$ appartient à C . Plus généralement, à un dessin D est associé un multigraphe $G = (X, E)$ avec $(x, y)_i \in E$ si et seulement si $f_i(x, y, \cdot) \in C$. Un multigraphe G , et donc en particulier un graphe, est dit plan si et seulement s'il existe un dessin plan D tel que G soit associé à D par la procédure ci-dessus.

10.2 Pré-requis de topologie de \mathbb{R}^2

Deux points x et y de \mathbb{R}^2 appartiennent à la même composante connexe par lignes brisées de $P \subset \mathbb{R}^2$ si et seulement si $x = y$ ou s'il existe un dessin D dont les lignes sont dans P avec x et y sur une ligne de D . La propriété d'appartenir à la même composante connexe par lignes brisées est une relation d'équivalence. Une partie $P \subset \mathbb{R}^2$ est dite connexe par lignes si et seulement si elle n'a qu'une seule composante connexe par lignes brisées. Le plan est connexe par lignes. Si D est un dessin tel que \mathbb{R}^2 privé des lignes de D n'est pas connexe par lignes, on dit que D sépare \mathbb{R}^2 . Un cycle de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire un ensemble homéomorphe à S^1 , sépare \mathbb{R}^2 en deux régions ayant le cycle comme frontière. Réciproquement, si un dessin D ne contient pas de sous-ensemble homéomorphe à S^1 , alors $\mathbb{R}^2 - D$ est un ensemble connexe par lignes.

10.3 Graphes planaires

Un multigraphe $G = (X, E)$ est dit planaire si et seulement s'il existe un multigraphe plan $G' = (X', E')$ et une bijection ϕ de X dans X' telle que $(x, y) \in E$ si et seulement si $(\phi(x), \phi(y)) \in E'$. Soit G un multigraphe planaire et soit D un dessin plan qui lui

est associé. Une face de D est un ouvert maximal de $\mathbb{R}^2 - D$. Deux faces sont dites adjacentes si l'intersection de leurs adhérences est non-vide.

Lemme 10.1. *Les chemins, les cycles et les forêts sont planaires. Le graphe K_4 est planaire. Les chemins et les forêts n'ont qu'une seule face. Les cycles ont deux faces.*

Démonstration. Cela résulte de nos pré-requis de topologie. \square

Un dessin plan est dit maximal si $D \cup \{e\}$ n'est pas un dessin plan pour tout $e \in X \times X - E$.

Lemme 10.2. *Soit D un dessin plan d'ordre au moins 3. Alors D est maximal si et seulement la frontière de toutes faces F de D est un triangle.*

Démonstration. Si la frontière de toutes faces F de D est un triangle, alors D est maximal d'après nos pré-requis de topologie. Réciproquement, soit F une face de D un dessin plan maximal. Soit x et y deux sommets de l'adhérence de F . Les sommets x et y appartiennent à la même composante connexe par lignes de $\mathbb{R}^2 - D \cup \{x, y\}$ donc sont reliés par une ligne de D par maximalité de D . Les sommets de l'adhérence de F forment donc un graphe complet. Les lignes de la frontière de F séparent \mathbb{R}^2 donc contiennent un cycle. Supposons qu'ils contiennent un cycle de longueur 4. Ce cycle a deux faces ; soit F_1 celle qui contient F . Alors l'une des lignes x_1x_3 ou x_2x_4 est contenu dans F_1 donc l'autre sépare F_1 . Donc F ne contient pas tous les sommets de C , ce qui est une contradiction. Donc ce cycle est de longueur 3. \square

Le dual plan G^* d'un multigraphe planaire connexe G associé à un dessin plan D de G est le multigraphe connexe construit par le procédé suivant. Soit D^* un dessin dont les sommets sont dans chacune des faces de D . Entre deux sommets de deux faces adjacentes, il existe une unique ligne incidente à chacune des lignes de leurs frontières communes. Soit G^* le multigraphe associé à D^* . Le dual plan G^{**} de G^* peut s'identifier à G .

Théorème 12. *Soit $G = (X, E)$ un multigraphe planaire connexe. Soit F l'ensemble des faces d'un dessin plan D de G . Alors $|X| - |E| + |F| = 2$.*

Démonstration. Soit G est acyclique. Alors G est un arbre donc $|X| - |E| = 1$ et D a une seule face donc la formule est vraie.

Soit maintenant $E' \subset E$ un ensemble d'arêtes et $H = (X, E')$ le sous-graphe de G ayant pour arête E' . A H est associé le sous-graphe G_H^* de G^* dont les arêtes sont les arêtes correspondant aux lignes de D^* qui ne sont pas incidentes à E' . Si $E' = \emptyset$, le graphe G_H^* est le graphe dual G^* . Au contraire, si $E' = E$, le graphe G_H^* est un graphe isolé ayant autant de sommets que G a de faces.

Si E' contient un cycle C , alors l'ensemble des lignes de C sépare \mathbb{R}^2 en deux régions dont une est bornée. Le sommet de G_H^* correspondant à la face infinie de G n'est donc pas dans la composante connexe des sommets correspondant aux faces incluses dans la région intérieure de C . Le graphe G_H^* est donc non-connexe. Réciproquement, si G_H^* est non-connexe, il existe une face qui n'est pas dans la composante connexe de la face infinie, donc cette face est bornée par des lignes homéomorphes à S^1 donc E' contient un cycle.

Soit T un arbre couvrant de G . D'après ce que nous avons vu plus haut, le graphe G_T^* est connexe. Si l'on ajoute une arête à T , donc si on supprime une arête à G_T^* , on crée un cycle, donc on déconnecte G_T^* . Donc G_T^* est un arbre. Par construction, c'est donc un arbre couvrant de G^* . Alors :

$$|X| - |E| + |F| = |X(T)| - |E(T)| - |E(G_T^*)| + |X(G_T^*)| = 1 + 1 = 2$$

□

Ce théorème montre que le nombre de faces d'un graphe planaire ne dépend pas du choix du dessin D qui lui est associé.

Corollaire 10.3. *Le nombre d'arête e d'un graphe planaire G ayant n sommets est au plus $3n - 6$. Plus généralement, si G est un graphe planaire dont les faces sont toutes bornées par des cycles de longueur ℓ , alors $(\ell - 2)e \leq (n - 2)\ell$*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que G est associé à un dessin plan maximal. Alors chaque face de G a pour frontière un triangle donc $2e = 3|F|$. De $3n - 3e + 3|F| = 6$, on déduit que $3n - 6 = e$. Si toutes les faces de G sont bornées par un cycle de longueur au moins ℓ , alors $2e \geq \ell|F|$ donc $\ell n - \ell e + \ell|F| = 2\ell \leq \ell n - (\ell - 2)e$ donc $(\ell - 2)e \leq (n - 2)\ell$. □

Corollaire 10.4. *Les graphes K_5 , $K_{3,3}$ et le graphe de Petersen ne sont pas planaires. Le n -cube est planaire si et seulement si $n \leq 3$.*

Démonstration. Le graphe K_5 a 10 arêtes ce qui est plus que les 9 permises par la formule d'Euler. Le graphe $K_{3,3}$ a 9 arêtes, ce qui est plus que les 8 permises par la formule d'Euler pour les graphes sans triangles. Le graphe de Petersen a 15 arêtes, ce qui est plus que les 13 permises par la formule d'Euler pour les graphes sans triangles ni carrés. Le n -cube a $n2^{n-1}$ arêtes et est planaire seulement s'il en a moins que $4(2^{n-1} - 1)$, donc seulement si $n \leq 3$. Le n -cube pour $n \leq 3$ admet bien un dessin plan. □

11 Exercices

11.1 Notions élémentaires

Exercice 1 :

1. Quel est le cardinal de $E(K_n)$?
2. Combien y a-t-il de graphes dont l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$?
3. Y a-t-il plus de graphes connexes ou de graphes non connexes de cardinal n ?
4. Montrer que si G est k -régulier, alors $L(G)$ est k' -régulier. Que vaut k' ?
5. Déterminer $L(P_n)$ et $L(C_n)$. Trouver deux graphes connexes distincts G et H tel que $L(G) = L(H)$.

Exercice 2 :

1. Que vaut la somme des degrés des sommets d'un graphe? En déduire que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.
2. Soit G un graphe tel que $|N_G(u) \cap N_G(v)|$ soit impair pour tout $(u, v) \in X \times X$. Montrer que le degré de tout sommet de G est pair.

Exercice 3 :

1. Montrer qu'un graphe de degré δ_G contient un chemin de longueur δ_G et un cycle de longueur au moins $\delta_G + 1$ si $\delta_G \geq 2$.
2. Montrer qu'un graphe de cardinal n et tel que $\delta_G \geq n/2$ est connexe.
3. Soit G un graphe connexe et H un sous-graphe strict de G . Montrer qu'il existe un sommet x de G à distance 1 de H .
4. Soit $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ un chemin de longueur maximale d'un graphe G connexe. Montrer qu'un voisin de x_1 est successeur d'un voisin de x_k seulement si $P = X(G)$. En déduire qu'un graphe connexe contient un chemin de longueur $\min\{2\delta_G, |G| - 1\}$.

Exercice 4 :

1. Montrer qu'un arbre T contient au moins Δ_T feuilles.
2. Un arbre binaire de racine x est un arbre ayant un unique sommet x de degré 0 ou 2 et dont les sommets intérieurs distincts de x sont de degré 3. Montrer que les arbres binaires sont caractérisés par la propriété d'induction structurelle suivante : un graphe est un arbre binaire si et seulement si c'est un sommet isolé x ou bien deux arbres binaires de racines y et z reliés à un sommet x .

3. Montrer que tout graphe connexe G contient un arbre couvrant. Soit $T(G)$ le graphe tel que $X(T(G))$ soit l'ensemble des arbres couvrants de G et $(x, y) \in E(T(G))$ si et seulement si la différence symétrique de $E(x)$ et $E(y)$ est de cardinal 2. Montrer que $T(G)$ est connexe.

Exercice 5 :

1. Montrer qu'un sous-graphe d'un graphe biparti est biparti.
2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair.
3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair induit.

Exercice 6 : Donner un exemple de graphe circulant connexe qui ne soit ni un cycle, ni complet. Donner un exemple de graphe de Cayley connexe qui ne soit pas un graphe circulant.

Exercice 7 : Le n -cube C^n est le graphe de Cayley $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, \{x | \exists! i, x_i = 1\})$. Que valent $X(C^n)$ et $E(C^n)$? Montrer que le n -cube est connexe et biparti.

Exercice 8 :

1. Une griffe est un arbre à quatre sommets et trois feuilles. Montrer que le graphe des arêtes $L(G)$ d'un graphe G ne contient pas de griffe induite.
2. Montrer que si deux arbres T et U ont même graphe des arêtes; alors T est isomorphe à U .

Exercice 9 :

1. Soit $H \subset G$ un sous-graphe. Montrer que $L(H) \subset L(G)$.
2. Déterminer tous les graphes G tels que $L(G) = G$.

11.2 Automorphismes

Exercice 1 : Énumérer les graphes de Cayley connexes de cardinal 4 et 7 non-isomorphes. Montrer qu'à isomorphisme près, il n'existe que deux graphes circulants connexes, de cardinal 10 et 3-réguliers.

Exercice 2 :

1. Montrer que le groupe des automorphismes d'un arbre binaire a pour cardinal une puissance de 2.
2. Soit T un arbre non-asmétrique et x un sommet fixé par $\text{Aut}(T)$. On appelle sous-arbre de $u \in X(T)$ le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets z de T tels que le chemin de x à z passe par u . Montrer que T admet deux sous-arbres isomorphes.
3. En déduire que si $\text{Aut}(T)$ ne contient pas d'élément d'ordre 2, alors $\text{Aut}(T)$ est trivial.

Exercice 3 : Soit S un sous-ensemble des transpositions de \mathfrak{S}_n . Le graphe $G(S) = (X, E)$ est défini par $X = \{1, \dots, n\}$ et $E = \{(i, j) \in S\}$.

1. Montrer que $G(S)$ est connexe si et seulement si S engendre \mathfrak{S}_n .
2. Montrer que S est un ensemble générateur minimal de \mathfrak{S}_n (c'est-à-dire que S engendre \mathfrak{S}_n mais un sous-ensemble strict de S n'engendre pas \mathfrak{S}_n) si et seulement si $G(S)$ est un arbre.
3. Montre que le graphe de Cayley (\mathfrak{S}_n, S) est biparti.

Exercice 4 : Montrer que le groupe D_{2n} des automorphismes du cycle C_n est le groupe engendré par $\sigma : x \mapsto x + 1$ et $\tau : x \mapsto -x$. Montrer que c'est exactement le groupe $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ et donc qu'il est de cardinal $2n$.

Exercice 5 : Montrer qu'il n'existe pas de graphe connexe non-trivial de cardinal 4 au plus qui soit asymétrique. Exhiber un graphe connexe asymétrique de cardinal 6. Exhiber un arbre asymétrique. Existe-t-il des arbres binaires non-triviaux asymétriques ?

Exercice 6 : Déterminer le groupe des automorphismes du graphe complet biparti $K_{m,n}$.

Exercice 7 : Soit $G = (X, E)$ un graphe de cardinal n et Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $x \in X$ et $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(x) = x$ seulement si $\sigma = \text{Id}$; pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que $\sigma(x) = y$. Montrer que G est un graphe de Cayley pour le graphe Γ .

Exercice 8 : Montrer que le graphe de Petersen n'est pas un graphe circulant.

Exercice 9 (difficile) :

1. Soit G un graphe et soit C_i ses composantes connexes. Déterminer $\text{Aut}(G)$ en fonction des $\text{Aut}(C_i)$ (on prendra garde à ce que deux composantes connexes distinctes peuvent être isomorphes).
2. Montrer que si un groupe G est le groupe des automorphismes d'un arbre T , c'est aussi le groupe des automorphismes d'un arbre T' qui n'est pas isomorphe à T .
3. Soit Γ la classe des groupes définie inductivement de la manière suivante. Le groupe restreint à l'identité appartient à Γ ; si $(G, H) \in \Gamma^2$, alors $G \times H \in \Gamma$; si $G \in \Gamma$ et $n \geq 2$, alors $G \rtimes \mathfrak{S}_n \in \Gamma$. Montrer que Γ est la classe des groupes G tels qu'il existe un arbre T tel que $\text{Aut}(T) = G$.

11.3 Connectivité

Exercice 1 : (Induction structurelle sur les graphes 2-connexes) On se propose de montrer que la classe des graphes 2-connexes est la classe des graphes obtenus par induction structurelle de la façon suivante : un graphe G est 2-connexe si et seulement si c'est un cycle ou bien s'il existe un graphe 2-connexe H et P_n un chemin $H - H$ tels que $G = H \cup P_n$. On appelle les graphes construits par ce procédé graphes 2-connexes d'induction.

1. Montrer qu'un graphe 2-connexe d'induction est 2-connexe.
2. Soit G un graphe 2-connexe. Montrer que G admet un sous-graphe maximal H qui est 2-connexe d'induction.
3. Montrer que H est un sous-graphe induit.
4. Montrer que la propriété d'appartenir à H est expansive et conclure.
5. Montrer, sans utiliser le théorème de Menger, que deux sommets d'un graphe 2-connexe sont sur un même cycle.

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout entier n , il existe un graphe connexe G et un sommet x tel que $G - x$ ait au moins n composantes connexes.
2. Soit G 2-connexe avec $G \neq K_3$. Soit $e \in E(G)$. Montrer que $G - e$ ou G/e est 2-connexe.

Exercice 3 : Soit G un graphe k -connexe.

1. Montrer que k sommets quelconques appartiennent à un même cycle.
2. Montrer que si G est de cardinal supérieur à $2k$, alors G contient un cycle de longueur au moins $2k$.

Exercice 4 : Quelle est la connectivité du graphe de Petersen ? Quelle est la connectivité du graphe circulant $(7, \{1, 3, 4, 6\})$? Quelle est la connectivité du n -cube ?

Exercice 5 : Un bloc est un sous-graphe maximal pour la propriété de ne pas avoir de séparateur de cardinal 1. Soit G un graphe.

1. Montrer qu'un bloc est un sommet isolé, ou bien une arête, ou bien un sous-graphe 2-connexe maximal.
2. Montrer qu'un cycle est contenu dans un unique bloc.
3. Montrer que l'intersection de deux blocs est vide ou bien est un unique sommet qui sépare G .
4. Soit \sim la relation sur $E(G)$ définie par $e \sim e'$ si et seulement si e et e' appartiennent à un même cycle de G . Montrer que \sim est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les arêtes des blocs.
5. Supposons G connexe. Soit X_1 l'ensemble de ses blocs et X_2 l'ensemble des intersections entre blocs. Soit $T(G) = (X_1 \cup X_2, E)$ avec $e = (x, y) \in E$ si et seulement si $x \in X_1, y \in X_2$ et $y \in x$. Montrer que $T(G)$ est un arbre.

Exercice 6 : Soit G un graphe 3-connexe non biparti. Montrer qu'il contient au moins 4 cycles impairs.

11.4 Algèbre linéaire

Exercice 1 : Soit A un anneau commutatif (non-nul). Les fonctions symétriques élémentaires à n éléments sont les polynômes symétriques :

$$S_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \prod_{i=1}^k X_{j_i} \in A[X_1, \dots, X_n]$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser les identités polynomiales suivantes :

$$P = \sum_{i=1}^n X_i = S_1, \quad Q = \sum_{i=1}^n X_i^2 = S_1^2 - 2S_2, \quad R = \sum_{i=1}^n X_i^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$

1. Soit G un graphe et $\chi(G) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ son polynôme caractéristique. Montrer que $|G| = n$, que $|E(G)| = -a_{n-2}$, que a_{n-3} est égal à -2 fois le nombre de triangles de G .
2. Calculer les quatre coefficients de degré les plus élevés du polynôme caractéristique d'un arbre.
3. Les polynômes suivants sont-ils polynômes caractéristiques d'un graphe ?

$$X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1, \quad X^5 + 6X^3 - 4X^2 + 5X + 4, \quad X^5 - 5X^3 + 2X$$

Exercice 2 :

1. Déterminer le spectre de C_{10} , de P_5 .
2. Déterminer le spectre du graphe circulant $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{0, \pm 3\})$. Déterminer le spectre du graphe $G = (X(G), E(G))$ avec $X(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $E(G) = \{(i, i+1) | i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\} \cup \{(0, 3), (1, 5), (2, 4)\}$.
3. Déterminer deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'un graphe de Cayley pour le groupe \mathfrak{S}_n , pour le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 3 :

1. Soit G un graphe et $\phi(G)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^X associé. Soit E un sous-espace vectoriel non-trivial de \mathbb{C}^X stable par $\phi(G)$. Montrer que E contient un vecteur propre de $\phi(G)$.
2. Un graphe biparti est dit semi-régulier si et seulement si le nombre de voisins d'un sommet ne dépend que de la classe de bipartition du sommet. Soit G un graphe semi-régulier. Montrer que l'ensemble des vecteurs de \mathbb{C}^X constants sur chacune des classes de bipartition est un sous-espace vectoriel stable par $\phi(G)$. Quelle est sa dimension ?
3. En déduire deux vecteurs propres d'un graphe G biparti semi-régulier.
4. Montrer que le spectre de $K_{m,n}$ est $\{0^{(m+n-2)}, \sqrt{mn}, -\sqrt{mn}\}$

Exercice 4 : Soit G un graphe et soit $\text{Aut}(G)$ son groupe des automorphismes. Il existe un morphisme ρ de groupes injectif de $\text{Aut}(G)$ dans $\text{End}(K^X)$ donné par la formule :

$$\forall x \in X, \rho(\sigma)(v)(x) = v(\sigma^{-1}(x))$$

1. Pourquoi la formule n'est-elle pas $\rho(\sigma)(v)(x) = v(\sigma(x))$? En calculant $\rho(\sigma)(v_x)(x)$ pour tout $x \in X$, montrer que ρ est effectivement injectif.
2. Soit v un vecteur propre de G pour la valeur propre λ . Montrer que $\rho(\sigma)(v)$ est un vecteur propre pour la valeur propre λ .
3. Supposons que toutes les valeurs propres de G soient de multiplicité 1. En utilisant les deux premières questions, montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe commutatif.

Exercice 5 : L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de partitions de K_{10} en 3 copies arêtes disjointes du graphe de Petersen, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de partition de $E(K_{10})$ en E_1, E_2, E_3 telle que $(\{1, \dots, 10\}, E_i)$ soit isomorphe au graphe de Petersen P pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Montrer que l'on peut trouver deux copies arêtes disjointes du graphe de Petersen dans K_{10} .
2. Soit P_1 et P_2 deux sous-graphes de K_{10} isomorphes au graphe de Petersen et arêtes disjointes. Soit $P_3 = K_{10} - (P_1 \cup P_2)$. Soit A, B et C les matrices d'adjacence de P_1, P_2 et P_3 .
 - a) Montrer que P_3 est 3-régulier et en déduire sa plus grande valeur propre.
 - b) Soit V_1 (resp. V_2) l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de A (resp. de B) de valeur propre 1. Montrer que $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ (on pourra montrer que V_i est inclus dans l'orthogonal d'un espace de dimension 1).
 - c) Soit $v \neq 0$ un vecteur de $V_1 \cap V_2$. Montrer que $Cv = -3v$. Conclure.
 - d) Soit S_1 et S_2 deux sous-ensembles disjoints à cinq éléments de K_{10} . Si P_i est le graphe de Petersen égal à C_5 sur S_i et à \bar{C}_5 sur S_{3-i} , montrer que P_3 est isomorphe au graphe circulant $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, \{3, 5, -3\})$.

11.5 Graphes hamiltoniens

Exercice 1 : Soit G un graphe. On dit que G est dur si pour tout ensemble $S \subset X(G)$ de cardinal k , le graphe $G - S$ a au plus $k - 1$ composantes connexes. Montrer qu'un graphe hamiltonien est dur. En déduire une construction d'un graphe 2-connexe non hamiltonien, d'un graphe 3-connexe non hamiltonien. Montrer que pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$, il existe des graphes κ -connexe qui ne sont pas hamiltoniens. Donner un exemple d'un graphe dur qui ne soit pas hamiltonien.

Exercice 2 : Montrer, par exemple par récurrence, que le n -cube est hamiltonien lorsque $n \geq 2$.

Exercice 3 : Soit $G = (\Gamma, S)$ un graphe de Cayley connexe de cardinal strictement supérieur à 2 avec Γ commutatif. L'objectif de cet exercice est de montrer que G est hamiltonien. Si $G = (\Gamma, S)$ s'écrit $(\Gamma_1 \times \Gamma_2, S)$, on note G/Γ_i le graphe de Cayley $(\Gamma_{3-i}, S \bmod \Gamma_i - \{0\})$.

1. Montrer qu'il n'y a pas de perte de généralité à supposer que S est un ensemble générateur minimal.
2. Montrer que si $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, alors G/Γ_i est connexe.
3. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que si $\Gamma_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou si $G_1 = G/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est hamiltonien, alors G est hamiltonien.
4. Montrer que G est hamiltonien lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier impair ou $\alpha > 1$.
5. Montrer que si un graphe G contient comme sous-graphe l'union disjointe de deux cycles reliés en deux paires de sommets voisins, alors G est hamiltonien.

6. Montrer que si $G = (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \times \Gamma_2, S)$ avec p premier impair ou $\alpha > 1$, alors G est hamiltonien.
7. Conclure.

11.6 Coloration

Exercice 1 : Soit G un graphe avec $m = |E|$. Montrer que :

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Exercice 2 : En utilisant la propriété d'entrelacement forte, montrer qu'un graphe G a au moins $\alpha(G)$ valeurs propres positives ou nulles.

Exercice 3 : Soit k un entier et $G = (X = \{x_1, \dots, x_n\}, E)$ un graphe connexe ayant au moins une arête avec $\omega(G) = \omega$ et $\chi(G) = k$. Soit $M(G) = (X', E')$ le graphe tel que :

$$\begin{aligned} X' &= \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{z\} \\ E' &= E \cup \{(y_i, z) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(x_i, y_j) \mid \forall (x_i, x_j) \in E\} \end{aligned}$$

On note X_1, X_2 et X_3 les sous-ensembles de X' égaux respectivement à $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ et $\{z\}$.

1. Soit $K^{\omega'}$ une clique maximale de $M(G)$. En séparant les cas selon que les sommets de $K^{\omega'}$ sont dans X_1, X_2 ou X_3 , montrer que $\omega' \leq \omega$.
2. Supposons que $M(G)$ soit k -coloriable et choisissons un tel coloriage. Montrer qu'il existe k sommets de G notés $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ tels que x_{i_j} est colorié par la couleur j et tel que x_{i_j} a des voisins de toutes les couleurs $k \neq i$.
3. En déduire que le sommet y_{i_j} est de la couleur j puis une contradiction.
4. Construire $M(K_2)$ puis $M(M(K_2))$. Expliquer comment construire un graphe G ne contenant pas de triangle et de nombre chromatique supérieur à 100.
5. Montrer que si G est tel que $\chi(H) < \chi(G)$ pour tout sous-graphe induit strict H , alors il en est de même pour $M(G)$.

Exercice 4 : Soit $G = (X, E)$ un graphe de nombre chromatique $\chi(G) = k$. Supposons qu'il existe un coloriage $C' = C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_n$ tel que $|C'_i| \geq 2$ pour tout i . L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe un tel coloriage avec $n = k$. Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$ un k -coloriage de G avec $C_1 = \{v_1\}$.

1. Minorer le cardinal de X en fonction de n . En déduire qu'il existe une classe C_i de cardinal strictement supérieur à 2.

2. Montrer que, quitte à renuméroter les C_i , il existe $u_2 \in C_2$ de la même couleur que v_1 dans C' .
3. Montrer que $|C_2| \geq 2$. Si $|C_2| > 2$, construire un k -coloriage de G avec $|C_1| \geq 2$ en changeant la couleur de u_2 .
4. Si $C_2 = \{u_2, v_2\}$, montrer que v_1 et v_2 ne sont pas de la même couleur dans C' .
5. En déduire qu'il existe C_3 de cardinal supérieur à 2 et $u_3 \in C_3$ de la même couleur que v_2 dans C' . Conclure si $|C_3| > 2$. Que peut-on faire si $C_3 = \{u_3, v_3\}$?
6. Montrer en utilisant la question (1) que le processus esquissé termine. Conclure.

Exercice 5 :

1. Un graphe $G = (X, E)$ est dit de comparaison si et seulement s'il existe un ordre partiel \leq sur X tel que $(xy) \in E$ si et seulement si $x \leq y$. Montrer que les graphes de comparaison sont parfaits.
2. Un graphe $G = (X, E)$ est dit d'intervalles si et seulement si X est une réunion d'intervalles de \mathbb{R} et $(IJ) \in E$ si et seulement si $I \cap J \neq \emptyset$. Montrer que les graphes d'intervalles sont triangulés, donc parfaits. Montrer que le complémentaire d'un graphe d'intervalle est parfait.

Exercice 6 : Soit $G = (X, E)$ un graphe et $x \in X(G)$. L'expansion de G par rapport à x est le graphe $G' = (X', E')$ avec $X' = X \cup \{x'\}$ et $E' = E \cup \{(x', y) | \forall y \in N_G(x) \cup \{x\}\}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'expansion par rapport à x d'un graphe parfait est un graphe parfait. On raisonne par récurrence sur le cardinal du graphe parfait G .

1. Formuler précisément la proposition que l'on souhaite démontrer de récurrence et traiter le cas $n = 1$. Soit maintenant G un graphe parfait de cardinal n et G' son expansion par rapport à x .
2. Montrer qu'il suffit de démontrer que $\chi(G') \leq \omega(G')$ pour conclure.
3. Montrer que si $\omega(G') = \omega(G) + 1$, alors G' est parfait. En déduire que l'on peut supposer que $\omega(G') = \omega(G)$.
4. Supposons que $\omega(G') = \omega(G)$ et fixons un coloriage de G utilisant $\omega(G)$ couleurs. Montrer que x n'appartient à aucune clique maximale de G mais que chaque clique maximale contient un élément de la couleur de x .
5. En déduire que le sous-graphe induit H obtenu à partir de G en supprimant tous les sommets de la même couleur que x sauf x vérifie $\chi(H) \leq \omega(G) - 1$.
6. Montrer que l'on peut étendre le $\omega(G) - 1$ -coloriage de H en un $\omega(G)$ -coloriage de G' et conclure.

12 Annexes

12.1 Annexe I : Algèbre

Proposition 12.1 (Théorème de Cauchy). *Si un nombre premier p divise l'ordre d'un groupe fini G , alors G contient $q \equiv -1 \pmod{p}$ éléments d'ordre p .*

Démonstration. Soit $\Gamma = (X, E)$ le graphe défini de la manière suivante :

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid \prod_{i=1}^p x_i = e \right\}, \quad E = \{(x, y) \in X \times X \mid x_i = y_{i+1}\}$$

Alors $|X| = |G|^{p-1}$ et $d_G(x) = 0$ ou 2 . Donc une composante connexe de G est un cycle ou un sommet isolé. Les cycles sont de cardinal p et $p \mid |X|$ donc p divise le nombre de sommets isolés. Un sommet est isolé dans Γ si et seulement si $x_i = x_j$ pour tout i, j donc si et seulement si x_1 est d'ordre divisant p . Le seul élément d'ordre 1 est l'identité. donc il existe $q \equiv -1 \pmod{p}$ éléments d'ordre p . \square

Corollaire 12.2. *A isomorphisme près, les deux groupes d'ordre 10 sont $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et D_{10} .*

Démonstration. Soit G d'ordre 10. Si G est cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Sinon, il admet d'après le théorème de Cauchy un élément d'ordre 2 et exactement 4 éléments d'ordre 5. Soit σ un tel élément ; les autres sont alors $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$. Donc $\tau\sigma$ n'est ni d'ordre 5, ni d'ordre 1, donc d'ordre 2. Donc G est le groupe diédral. \square

Lemme 12.3. *Soit Γ un groupe commutatif fini et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de G . Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Alors la famille $(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)$ peut être prolongé en une famille génératrice de G de cardinal n .*

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Quitte à remplacer x_i par $-x_i$, on peut supposer que les λ_i sont tous positifs. Le lemme est vrai si $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Sinon, $(z_i) = (x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n)$ engendre G et $(\mu_i) = (|\lambda_1 - \lambda_2|, \lambda_2, \dots, \lambda_2)$ est tel que $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq S$. On peut donc supposer que la famille $(\sum_{i=1}^n \mu_i z_i) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)$ se prolonge en une famille génératrice de G . Le lemme est donc démontré. \square

Théorème 13 (Théorème de structure des groupes finis commutatifs). *Un groupe G commutatif fini est un produit de groupes cycliques.*

Démonstration. Si G est engendré par un unique élément, alors il est cyclique et le théorème est vrai pour G . Supposons le théorème vraie pour tout groupe commutatif fini engendré par au plus n éléments. Soit G un groupe commutatif fini engendré par $n + 1$ éléments (x_i) . Quitte à changer d'ensemble générateur et re-numéroter, nous pouvons supposer que x_1 est d'ordre minimal parmi les générateurs. Le groupe

$\langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \dots, x_n \rangle$ se surjecte sur G . Soit $x = (\lambda_1 x_1, \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i)$ un élément du noyau. Supposons $\lambda_1 \neq 0$ et soit alors d le plus grand diviseur commun aux λ_i . Soit $\mu_i = \lambda_i/d$. Les μ_i sont premiers entre eux. D'après le lemme 12.3, la famille $(y = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i)$ se prolonge en une famille génératrice de g . Or $dy = 0$ et $d|\lambda_1$ donc d est strictement inférieur à l'ordre de x_1 . C'est une contradiction. Donc $\lambda_1 = 0$. Donc $\langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \dots, x_n \rangle$ est isomorphe à G , qui est donc un produit de groupes cycliques. \square

Corollaire 12.4. *Un groupe commutatif fini G d'ordre n admet n morphismes distincts de G vers \mathbb{C}^\times . Vu comme élément de \mathbb{C}^n , ces morphismes sont orthogonaux pour le produit scalaire hermitien usuel de \mathbb{C}^n .*

Démonstration. Supposons que G s'écrive $G_1 \times G_2$ et soit χ_i un morphisme de groupes de G_i vers \mathbb{C}^\times . Alors

$$\begin{aligned} \chi_1 \times \chi_2 : \quad G = G_1 \times G_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes de G vers \mathbb{C}^\times . De plus, si $\chi = \chi_1 \times \chi_2$ et $\psi = \psi_1 \times \psi_2$ sont égaux, le calcul de l'image de (g, e_2) et (e_1, g) par l'un et l'autre montre que $\chi_1 = \psi_1$ et $\chi_2 = \psi_2$. Pour montrer la première assertion, il suffit donc en vertu du théorème 13 de la démontrer pour le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier. Soit alors ζ une racine primitive p^α -ième de l'unité. Les p^α morphismes de groupes χ_i définis par $\chi_i(1) = \zeta^i$ pour $0 \leq i \leq p^\alpha - 1$ conviennent alors.

Soit χ et ψ deux des n caractères construits par le procédé ci-dessus et h un élément de G .

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \bar{\chi}(g)\psi(g) &= \sum_{g \in G} \bar{\chi}(gh)\psi(gh) \\ &= \bar{\chi}(h)\psi(h) \sum_{g \in G} \bar{\chi}(g)\psi(g) \end{aligned}$$

Donc $(1 - \bar{\chi}(h))(\chi|\psi) = 0$. Ceci implique que $(\chi|\psi) = 0$ ou bien que $\chi = \psi$. \square

12.2 Annexe II : Propriétés connexe-descendantes et connexe-ascendantes

Soit P une propriété relative à un graphe. La propriété P est dite connexe-ascendante si P est vraie pour G si P est vraie pour toutes les composantes connexes de G . Les propriétés suivantes sont connexe-ascendante :

1. Être de degré minimal ou maximal d .
2. Être acyclique.
3. Être biparti.

4. Plus généralement, ne pas contenir un sous-graphe H connexe spécifique.
5. Être k -coloriable.
6. Avoir un spectre semi-simple.
7. Être parfait.

La propriété P est dite connexe-descendante si P est vraie pour G seulement si P est vraie pour une composante connexe de G . Les propriétés suivantes sont connexe-descendantes :

1. Être de degré minimal ou maximal d .
2. Contenir un cycle.
3. Contenir une clique de taille n .
4. Plus généralement, contenir un sous-graphe H connexe spécifique.
5. Plus généralement, la négation d'une propriété connexe-ascendante.

La propriété P est dite fortement connexe-ascendante si P est vraie pour G si P est vraie pour une composante connexe de G . Les propriétés suivantes sont fortement connexe-ascendantes :

1. Contenir un cycle.
2. Contenir une clique de taille n .
3. Plus généralement, contenir un sous-graphe H connexe spécifique.
4. Admettre $\lambda \in K$ comme valeur propre.

La propriété P est dite fortement connexe-descendante si P est vraie pour G seulement si P est vraie pour toutes les composantes connexes de G . Les propriétés suivantes sont fortement connexe-descendantes :

1. Être de degré minimal d .
2. Être biparti.
3. Être k -coloriable.
4. Avoir un spectre semi-simple.
5. Être parfait.

Si P est fortement connexe-ascendante et connexe-descendante, alors P est vraie pour G si et seulement si P est vraie pour une composante connexe. Si P est connexe-ascendante et fortement connexe-descendante, alors P est vraie pour toutes les composantes connexes si et seulement si P est vraie pour G .

Annexe III : Classe d'isomorphisme

Proposition 12.5. *Les propriétés suivantes sont indépendantes de la classe d'isomorphisme.*

1. $|G| = n, |E| = n, \delta_G = n, \Delta_G = n.$
2. $\text{Aut}(G) = \Gamma.$
3. $\chi(G) = P \in K[X].$
4. Être k -coloriable.
5. Être hamiltonien.
6. Contenir un sous-graphe isomorphe à un graphe $H.$

Les propriétés suivantes ne sont pas indépendantes de la classe d'isomorphisme.

1. Être un sous-graphe d'un graphe $H.$
2. Être un graphe circulant, en particulier être un graphe de Cayley.
3. L'ensemble X étant fixé, être un graphe de Cayley.
4. Être un graphe de Cayley étant fixé, être un graphe de Cayley pour un certain groupe $\Gamma.$
5. Être isomorphe en tant que graphe de Cayley à un graphe de Cayley fixé.

Démonstration. 1. Un isomorphisme est une bijection de l'ensemble des sommets donc préserve le cardinal. Il préserve l'incidence donc préserve le cardinal de E ainsi que l'ensemble des degrés.

2. L'application qui envoie $\tau \in \text{Aut}(G)$ sur $\sigma\tau\sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \text{Hom}(G, H)$ est un isomorphisme de $\text{Aut}(G)$ sur $\text{Aut}(H).$
3. L'isomorphisme σ induit un isomorphisme de $K^{X(G)}$ sur $K^{X(H)}$.
4. L'isomorphisme σ induit un isomorphisme d'un stable de G sur un stable de $H.$
5. L'isomorphisme σ envoie un cycle de G sur un cycle de $H.$
6. L'isomorphisme σ envoie $L \subset G$ sur $\sigma(L) \subset H.$

1. Le sommet isolé est isomorphe au sous-graphe induit par un sommet dans $K_2.$
2. Le graphe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{(0, 2), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 5)\})$ n'est pas un graphe circulant, mais il est isomorphe à un cycle.
3. Le même contre-exemple que plus haut convient.

4. Le 4-cycle est un graphe de Cayley pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Soit Γ le sous-groupe de \mathfrak{S}_8 engendré par l'ensemble S à trois éléments $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$, $(a, b, c) \mapsto (c, a, b)$ et $(a, b, c) \mapsto (a + 1, b, c)$, où l'on identifie \mathfrak{S}_8 avec l'ensemble des bijections de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Le graphe (Γ, S) est isomorphe à $(\mathfrak{S}_4, \{(12), (1342), (1423)\})$ mais ne lui est pas isomorphe en tant que graphes de Cayley.

□

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Notions de base	2
1.1.1	Définitions	2
1.1.2	Chemins, connexité, cycles, arbres	3
2	Méthodes	7
2.1	Maximalité, minimalité	7
2.1.1	Récurrence sur le cardinal de G	7
2.1.2	Récurrence sur le cardinal de E	7
2.1.3	Maximalité par rapport à une caractérisation du graphe	7
2.2	Induction structurelle	8
3	Bestiaire	10
3.1	Graphes élémentaires	10
3.1.1	Graphes complets, isolés	10
3.1.2	Chemins élémentaires, cycles élémentaires	10
3.2	Graphes moins élémentaires	10
3.2.1	Graphes circulants	10
3.2.2	Graphes de Cayley	11
3.2.3	Graphes de Mycielski	12
3.3	Bêtes curieuses et remarquables	13
3.3.1	Graphes bipartis	13
3.3.2	Grappe des arêtes	14
3.3.3	Grappe de Petersen	15
4	Isomorphismes	16
4.1	Définitions	16
4.1.1	Rappel	16
4.1.2	Groupes des automorphismes d'un graphe G	16
4.2	Exemples	17
4.2.1	Graphes complets, isolés	17
4.2.2	Chemins élémentaires, cycles élémentaires	18
4.2.3	Arbres	18
4.2.4	Graphes circulants	19
4.2.5	Graphes de Cayley	19
4.2.6	Grappe de Petersen	19
4.2.7	Grappe asymétrique	20

5	Connectivité	21
5.1	Généralités	21
5.2	Théorème de Menger	22
6	Algèbre linéaire	25
6.1	Endomorphisme associé à un graphe	25
6.1.1	Généralités	25
6.1.2	Théorème de Sachs	26
6.2	Spectre	27
6.2.1	Généralités	27
6.2.2	Entrelacement	30
6.2.3	Bipartition	31
7	Graphes hamiltoniens	32
7.1	Cycles hamiltoniens	32
7.2	Deux classes de graphes hamiltoniens	34
8	Coloration	35
8.1	Généralités	35
8.2	Perfection	36
9	Morphismes	40
9.1	Définitions	40
9.2	Lien avec la coloration	42
10	Planarité	44
10.1	Dessins, multigraphes, planarités	44
10.2	Pré-requis de topologie de \mathbb{R}^2	44
10.3	Graphes planaires	44
11	Exercices	47
11.1	Notions élémentaires	47
11.2	Automorphismes	48
11.3	Connectivité	50
11.4	Algèbre linéaire	51
11.5	Graphes hamiltoniens	53
11.6	Coloration	54
12	Annexes	56
12.1	Annexe I : Algèbre	56
12.2	Annexe II : Propriétés connexe-descendantes et connexe-ascendantes	57