Année 2002/2003
Lycées Jean Jaurès (Montreuil)
et Louise Michel (Bobigny)

Sujets Math en Jeans

Sujet 1 : Les minutes reportables, ou comment téléphoner moins cher. Un utilisateur a souscrit un forfait de tlphone portable de 2 heures par mois, avec report des minutes non utilises. Chaque mois, il tlphone alatoirement soit 1h50 (une chance sur deux), soit 2h10 (une chance sur deux). Son forfait dure un an, de janvier dcembre. Il paye 20 euros par mois, et 30 centimes par minute de dpassement. Pour chacun des deux procds de calcul dcrits ci-dessous, quel est en moyenne le prix total pay en un an ? Quelle est la probabilit de ne jamais payer de hors-forfait ? Quel est celui des deux procds qui est le plus avantageux ?

Voici la manire prcise dont sont comptabilises les minutes reportes. Par exemple, supposons qu'en janvier on tlphone seulement 1h50. Il reste 10 minutes, qui sont reportes sur le mois de fvrier. Mais ces 10 minutes, si elles ne sont pas utilises en fvrier, seront perdues (elles ne peuvent pas tre reportes nouveau sur mars). D'o les deux procds :

Premier procd : en fvrier, l'utilisateur commence par utiliser les 10 minutes qui restent, puis consomme (en partie ou en totalit) son forfait de fvrier. Si il parle 1h50 en fvrier, il aura consomm seulement 1h40 de forfait, et il pourra reporter 20 minutes sur mars.

Second procd : en fvrier, l'utilisateur commence par utiliser (en partie ou en totalit) ses 2 heures de forfait. Puis, si il en a besoin, il utilise les 10 minutes qui restent de janvier. Si il parle 1h50 en fvrier, il aura consomm 1h50 de forfait, il pourra reporter 10 minutes sur mars, mais celles qui datent de janvier sont perdues.

Une premire tape pour traiter ce problme est de l'exprimer de manire plus simple. Par exemple, on peut coder les mois o on parle 2h10 par un signe plus, celles o on parle 1h50 par un moins. La consommation sur un an est alors donne par une suite de 12 signes ; comment calculer facilement le prix pay au bout d'un an, en fonction de cette suite de signes ?

Sujet 2 : Une suite qui se raconte. Considérons le tableau suivant :

												1	1
												1	2
											1	1	2
										1	1	2	3
							1	1	1	2	2	3	4
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	6	7

Il est obtenu de la manière suivante : si une ligne est formée par les nombres a_1, a_2, $\ldots$, a_k (qui sont par ordre croissant, quand on les lit de gauche à droite) alors la ligne suivante sera formée de a_k fois le nombre 1, puis a_{k-1} fois le nombre 2, et ainsi de suite ; elle se terminera par le nombre k répété a_1 fois. Par exemple, la quatrième ligne est formée par les nombres 1, 1, 2, 3 donc la cinquième est formée de 3 fois le chiffre 1, puis 2 fois le chiffre 2, 1 fois le chiffre 3 et 1 fois le chiffre 4.

On s'intéresse alors à la suite qu'on peut lire dans la colonne de droite du tableau : elle commence par 1, 2, 2, 3, 4, 7, ... Quels sont les termes suivants ? Combien arriverez-vous à en calculer ? Arriverez-vous à calculer le n-ième terme de cette suite sans écrire en entier la n-ième ligne du tableau (ni même la $(n-1)$-ième, voire davantage...) ? Que pouvez-vous dire du n-ième terme de cette suite, quand n est grand ? (même sans le calculer explicitement, pouvez-vous en donner un encadrement ?)

Sujet 3 : Développement décimal de l'inverse d'un entier. Quand on écrit, en base 10, l'inverse d'un entier, on obtient une suite périodique de chiffres. Par exemple, on a :

$$\frac{1}{7} = 0,\ 142857\,142857\,142857\,142857\ \ldots$$

$$\frac{1}{48} = 0,\ 0208\,3\,3\,3\,3\,3\,3\ldots$$

Quelles relations pouvez-vous trouver entre un entier n et la période de $\frac{1}{n}$ (par exemple entre 7 et 142857, ou entre 48 et 3) ? Pouvez-vous donner un encadrement (en fonction de n) du nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{n}$? Il pourra être utile, d'ailleurs, de démontrer que le développement décimal de $\frac{1}{n}$ est effectivement périodique... Pouvez-vous dire quand la période commence juste après la virgule (comme pour $\frac{1}{7}$), et quand elle commence plus tard (comme pour $\frac{1}{48}$, avec la présence intermédiaire de 0208) ?